§2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Khối đa diện (H) được gọi là *khối đa diện lồi* nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là *đa diện lồi.*

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.

II- KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Định nghĩa

Một khối đa diện lồi được gọi là *khối đa diện đều loại* $\{p\ ;\ q\}$ nếu :

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh ;

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Từ định nghĩa trên ta thấy các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau.

2. Định lí

Có năm loại khối đa diện đều. Đó là các khối đa diện đều loại $\{3\ ;\ 3\}$, loại $\{4\ ;\ 3\}$, loại $\{3\ ;\ 4\}$, loại $\{5\ ;\ 3\}$, và loại $\{3\ ;\ 5\}$.

Tuỳ theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo thứ tự được gọi là các khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Chứng minh một số tính chất của khối đa diện đều

1. Phương pháp giải

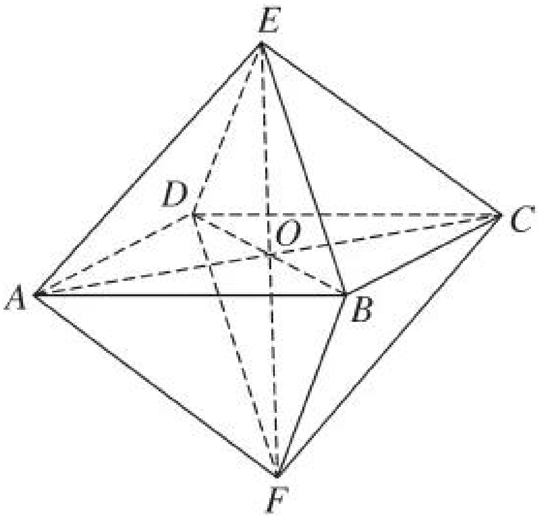
Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

2. Ví dụ

Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.7). Chứng minh rằng :

a) Các điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng ; các điểm E, C, F, A cùng thuộc một mặt phẳng và các điểm E, D, F, B cùng thuộc một mặt phẳng ;

b) Chứng minh rằng ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(ECFA)$ và $(EDFB)$ đôi một vuông góc với nhau.



Hình 1.7

Giải

a) Vì $AE = AF = BE = BF = CE = CF = DE = DF$ nên A, B, C, D thuộc mặt phẳng trung trực của EF. Tương tự các điểm E, C, F, A thuộc mặt phẳng trung trực của BD ; E, D, F, B thuộc mặt phẳng trung trực của AC.

b) Mặt phẳng $(ECFA)$ chứa EF và $EF \perp (ABCD)$ (vì $(ABCD)$ là mặt phẳng trung trực của EF nên $EF \perp (ABCD)$). Do đó $(ECFA) \perp (ABCD)$. Tương tự, ta chứng minh được $(ABCD) \perp (EDFB)$ và $(EDFB) \perp (ECFA)$.

VẤN ĐỀ 2

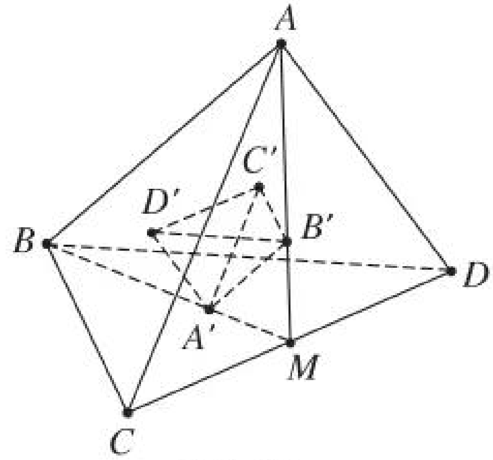
Xác định một khối đa diện đều

1. Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

2. Ví dụ

Chứng minh rằng trọng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.



Hình 1.8

Giải

(h.1.8) Giả sử $ABCD$ là một tứ diện đều có cạnh bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Khi đó AB' và BA' cắt nhau tại trung điểm M của CD. Và $A'B' = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{a}{3}$.

Tương tự các cạnh còn lại của tứ diện $A'B'C'D'$ cũng bằng $\frac{a}{3}$. Suy ra $A'B'C'D'$ là một tứ diện đều.

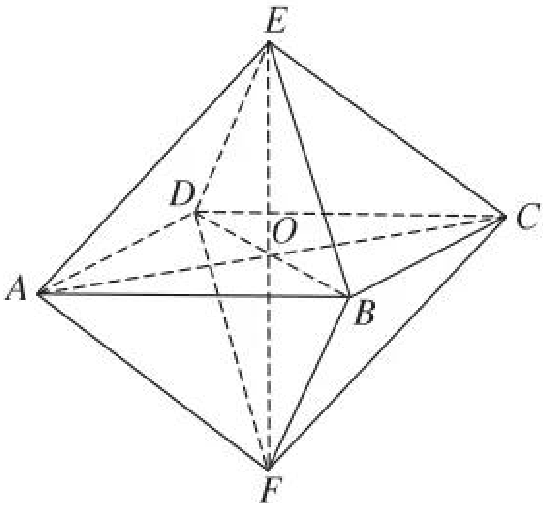
C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.6. Tính sin của góc tạo bởi hai mặt kề nhau (tức là hai mặt có một cạnh chung) của một tứ diện đều.

1.7. Cho ba đoạn thẳng bằng nhau, đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của chúng. Chứng minh rằng các đầu mút của ba đoạn thẳng ấy là các đỉnh của một hình bát diện đều.

1.8. Cho một khối bát diện đều. Hãy chỉ ra một mặt phẳng đối xứng, một tâm đối xứng và một trục đối xứng của nó.

1.9. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.9). Gọi O là giao điểm của AC và BD, M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AE. Tính diện tích thiết diện tạo bởi khối bát diện đó với mặt phẳng (OMN).



Hình 1.9