§2. MẶT CẦU

2.13. (h.2.33) a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AB'$.

Ta lại có $AB' \perp SC$ nên suy ra $AB' \perp (SBC)$.

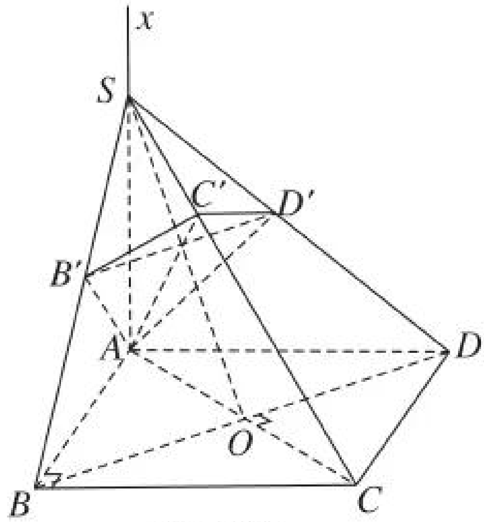
Do đó $AB' \perp B'C$.

Chứng minh tương tự ta có $AD' \perp D'C$.

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C}$

$= \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} = 90^{\circ}$.

Từ đó suy ra 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính là AC.

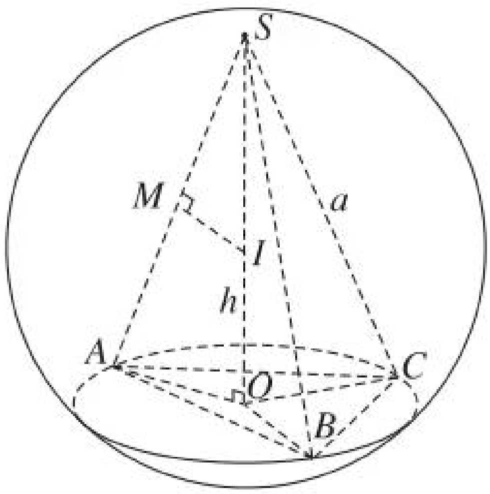


Hình 2.33

b) Gọi r là bán kính mặt cầu, ta có $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$ và $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

2.14. (h.2.34) Giả sử ta có mặt cầu tâm I đi qua các đỉnh S, A, B, C của hình chóp. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo giao tuyến là đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $SA = SB = SC$ nên ta có $SO \perp (ABC)$ và OS là trục của đường tròn tâm O. Do đó $SO \perp AO$. Trong tam giác SAO, đường trung trực của đoạn SA cắt SO tại I và ta được hai tam giác vuông đồng dạng là SIM và SAO, với M là trung điểm của cạnh SA.



Hình 2.34

Ta có $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SA}{2SO}$ với $SI = IA = IB = IC = r$.

Vậy $r = SI = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{a^2}{2h}$.

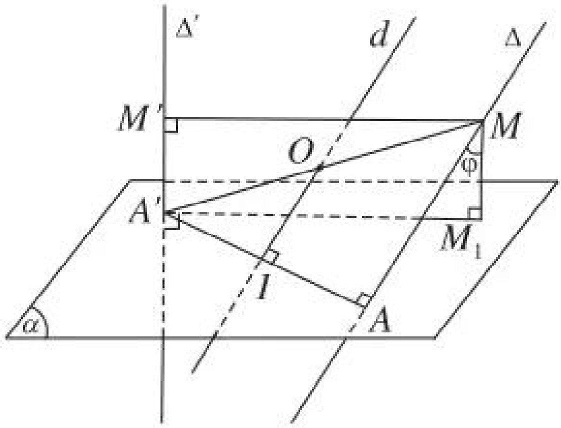
Do đó diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ đã cho là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a^2}{2h}\right)^2 = \pi\frac{a^4}{h^2}.$$

2.15. (h.2.35) a) Theo giả thiết ta có :

$\widehat{A'M'M} = \widehat{A'AM} = \widehat{A'M_1M} = 90^\circ$.

Do đó 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) tâm O, với O là trung điểm của $A'M$ và có bán kính $r = \dfrac{A'M}{2}$.



Hình 2.35

Mặt khác ta có $A'M^2 = A'A^2 + AM^2$,

trong đó $\cos\varphi = \dfrac{MM_1}{AM}$, nên $AM = \dfrac{MM_1}{\cos\varphi} = \dfrac{x}{\cos\varphi}$.

Do đó $A'M^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{\cos^2\varphi}$, suy ra $A'M = \sqrt{\dfrac{a^2\cos^2\varphi + x^2}{\cos^2\varphi}}$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + x^2}$$

Mặt cầu tâm O có bán kính $r = \dfrac{A'M}{2} = \dfrac{1}{2\cos\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + x^2}$.

Diện tích của mặt cầu tâm O :

$$S = 4\pi r^2 = \pi(2r)^2 = \pi(A'M^2) = \pi\left(a^2 + \frac{x^2}{\cos^2\varphi}\right).$$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AA'. Ta có $IO \,//\, \Delta$ nên tâm O di động trên đường thẳng d cố định đi qua I và song song với Δ. Mặt cầu tâm O đi qua hai điểm cố định A, A', có tâm di động trên đường trung trực d cố định của đoạn AA'. Vậy mặt cầu tâm O luôn luôn chứa đường tròn cố định tâm I có đường kính AA' nằm trong mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với d.

2.16. a) (h.2.36) $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC, ta có $MA = MB = MC$. Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại M. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

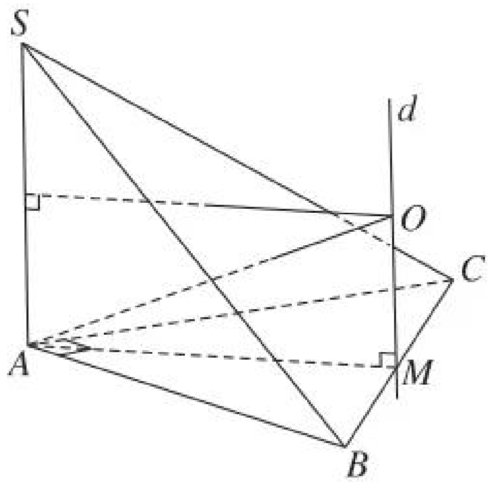
Ta có $OS = OA = OB = OC$

và $r^2 = OA^2 = OM^2 + MA^2$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có

$r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



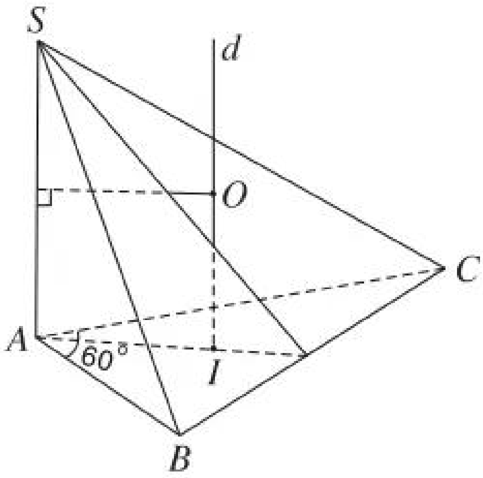
Hình 2.36

b) (h.2.37) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $b = c$, khi đó ABC là tam giác đều cạnh b. Gọi I là trọng tâm của tam giác đều nên I đồng thời cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Dựng d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

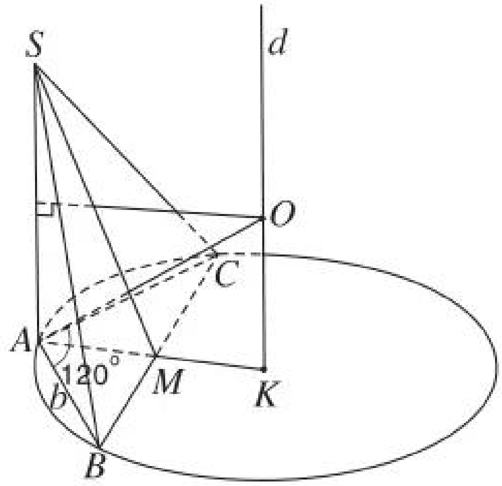
Ta có $OS = OA = OB = OC$ và $r^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2$.

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}. \text{ Vậy } r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}}.$$



Hình 2.37



Hình 2.38

c) (h.2.38) $\widehat{BAC} = 120^{\circ}$ và $b = c$, khi đó ABC là một tam giác cân có góc A ở đỉnh bằng 120° và cạnh bên bằng b. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Kéo dài AM một đoạn $MK = AM$, ta có $KA = KB = KC = AB = AC = b$.

Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại K. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

Ta có : $OS = OA = OB = OC$ và $r^2 = OA^2 = OK^2 + KA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$.

Do đó ta có mặt cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có bán kính $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

2.17. (h.2.39) a) Tam giác ADC vuông tại A nên $AD^2 = DC^2 - AC^2$ (1)

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AD^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2$ (3)

Ta lại có $AC^2 = DC^2 - AD^2$ và $BD^2 = AD^2 + AB^2$ (4)

$DC^2 = 4(\text{r}^2 - \text{h}^2)$, $AB^2 = 4h^2$ (5)

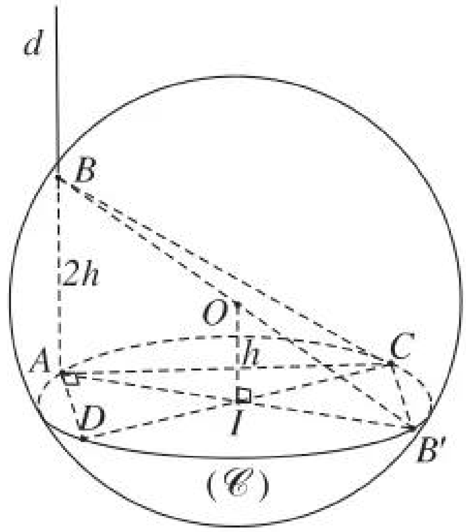
Từ (4) và (5) ta có :

$$AC^2 + BD^2 = DC^2 + AB^2 = 4(r^2 - h^2) + 4h^2 = 4r^2 \qquad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có : $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ (không đổi)

b) Diện tích tam giác BCD bằng $\frac{1}{2}$ đường cao BH nhân với đường kính DC. Diện tích này lớn nhất khi BI là đường cao và khi đó $AI \perp CD$.

c) Ta có $AH \perp DC$. Do đó khi CD di động, điểm H luôn luôn nhìn đoạn AI dưới một góc vuông. Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn đường kính AI nằm trong mặt phẳng (α).



Hình 2.39

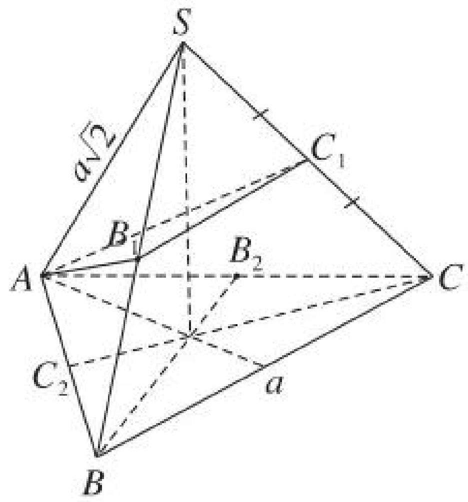
2.18. (h.2.40) a) Giả sử mặt cầu đi qua đỉnh A của hình chóp và tiếp xúc với cạnh SB tại B_1, tiếp xúc với cạnh SC tại C_1. Khi đó mặt cầu cắt cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm C_2 , B_2. Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu đó theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn này tiếp xúc với SB tại B_1 và đi qua A và C_2.

Do đó ta có : $BB_1^2 = BA.BC_2$ trong đó

$BB_1 = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$ Do đó $BB_1^2 = \frac{a^2}{2}\cdot$

Vậy $\frac{a^2}{2} = a.BC_2 \Rightarrow BC_2 = \frac{a^2}{2} : a = \frac{a}{2}$.

Điều đó chứng tỏ mặt cầu nói trên đi qua trung điểm C_2 của đoạn AB. Lí luận tương tự ta chứng minh được mặt cầu đó đi qua trung điểm B_2 của AC.



Hình 2.40

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D, ta có :

$$SD.\,SA = SB_1^2 \text{ hay } SD.a\sqrt{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}\cdot$$

Do đó $SD = \frac{a^2}{2} : a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ và $AD = SA - SD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

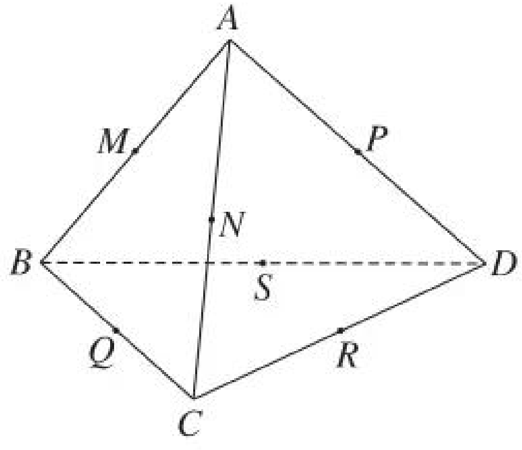
2.19. (h.2.41) Giả sử có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt tại M, N, P, Q, R, S. Khi đó AM, AN, AP là các tiếp tuyến cùng phát xuất từ A nên $AM = AN = AP$.

Lập luận tương tự ta cũng có :

$BM = BQ = BS$; $CQ = CR = CN$;

$DR = DS = DP$.

Vậy
$$\begin{aligned} AB + CD &= AM + MB + CR + RD \\ &= AN + BS + CN + DS \\ &= AN + NC + BS + SD \\ &= AC + BD \end{aligned}$$



Hình 2.41

Bằng lí luận tương tự ta chứng minh được $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

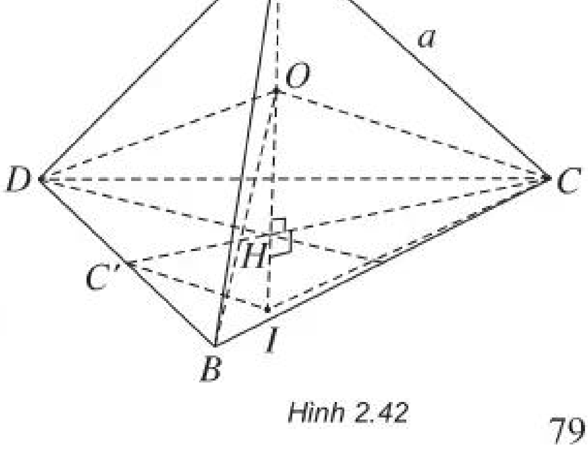
2.20. (h.2.42) Gọi H là trọng tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AH \perp (BCD)$. Do đó $AH^2 = AC^2 - HC^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$.

Vậy $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Mặt khác $OC^2 = OH^2 + HC^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}$ hay $OC = OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $BD = BC = CD = a$ nên các tam giác DOB, BOC, COD là những tam giác vuông cân tại O. Do đó hình chóp $ODBC$ là hình chóp có đáy là tam giác đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên OH, ngoài ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp này phải nằm trên trục của tam giác vuông DOB. Từ trung điểm C' của cạnh BD ta vẽ đường thẳng song song với OC cắt đường thẳng OH



Hình 2.42

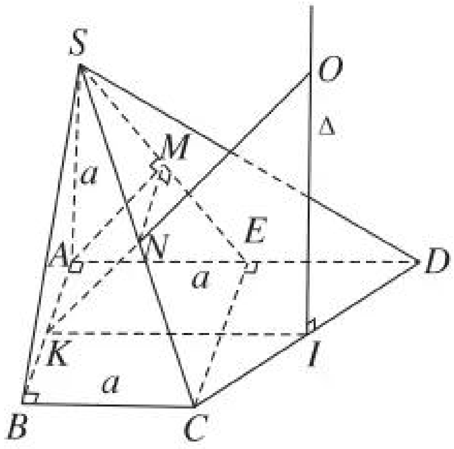
tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$. Mặt cầu này có bán kính là IC và $IC^2 = IH^2 + HC^2$.

Chú ý rằng $IH = \dfrac{1}{2}OH$ (vì $HC' = \dfrac{1}{2}HC$).

Do đó : $IC^2 = \dfrac{a^2}{24} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{9a^2}{24}$ hay $IC = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}\cdot$

2.21. (h.2.43) Tam giác CED là tam giác vuông cân tại E nên trục của đường tròn đi qua ba điểm C, E, D là đường thẳng Δ đi qua trung điểm I của đoạn CD và song song với SA.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC. Ta có mặt phẳng $(ABNM)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn SE. Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ chính là giao điểm của Δ và mặt phẳng $(ABNM)$. Gọi K là trung điểm của AB thì $KN \;//\; AM$ và do đó $KN \;//\; (SAE)$. Ta có $IK \;//\; AD$ nên $IK \;//\; (SAE)$.



Hình 2.43

Vậy KN và Δ đồng phẳng và ta có O là giao điểm cần tìm.

Chú ý rằng OIK là tam giác vuông cân, vì $\widehat{OKI} = \widehat{MAE} = 45^{\circ}$.

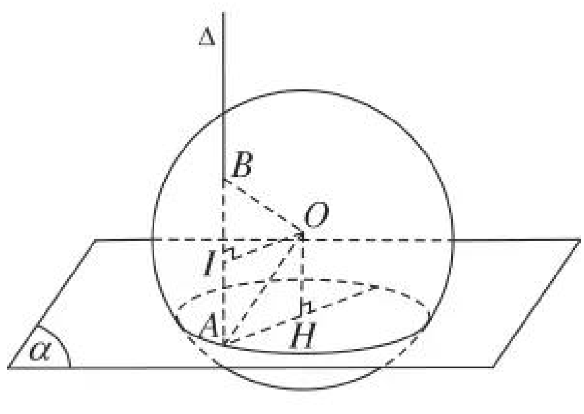
Ta có $OI = IK$, trong đó $IK = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{a + 2a}{2} = \dfrac{3a}{2}\cdot$

Vậy $OC^2 = OI^2 + IC^2 = \dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4}$ (vì $CD = a\sqrt{2}$, $IC = \dfrac{CD}{2}$). Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là :

$r = OC = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}\cdot$

2.22. (h.2.44) a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O trên mặt phẳng (α). Theo giả thiết ta có $\widehat{OAH} = 30^{\circ}$.

Do đó : $HA = OA\cos 30^{\circ} = r\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$



Hình 2.44

Vậy diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu là : $S = \pi . HA^2 = \frac{3\pi r^2}{4}\cdot$

b) Mặt phẳng (*ABO*) qua tâm *O* của hình cầu nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn qua *A* và *B*. Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB* ta có $OI \perp AB$. Vì $AB \parallel OH$ nên *AIOH* là hình chữ nhật.

Do đó $AI = OH = \frac{OA}{2} = \frac{r}{2}\cdot$ Vậy $AB = 2AI = r$.

Chú ý. Có thể nhận xét rằng tam giác *OAB* cân tại *O* ($OA = OB$) và có góc $\widehat{OAB} = 60^{o}$ nên *OAB* là tam giác đều và suy ra $AB = OA = OB = r$.

2.23. (h.2.45) a) Theo giả thiết ta có $AH = \frac{4r}{3}$.

Ta suy ra $OH = \frac{r}{3}\cdot$ Gọi r' là bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$).

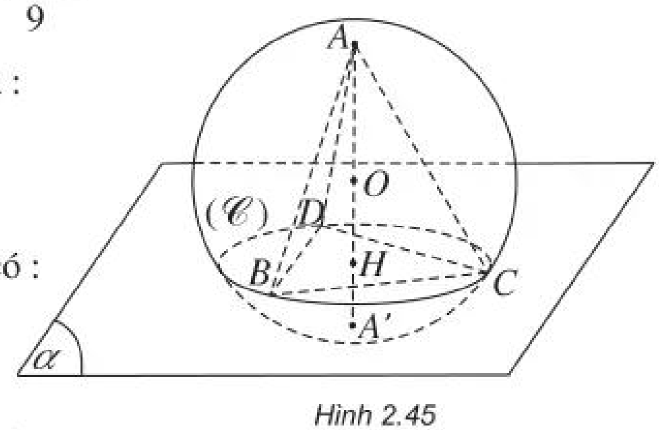
Ta có : $r'^2 = r^2 - OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}\cdot$

Vậy diện tích của hình tròn ($\mathscr{C}$) là :

$S = \pi r'^2 = \frac{8\pi r^2}{9}\cdot$

b) Vì *BCD* là tam giác đều nên ta có :

$BC = r'.\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$ (h.2.45).



Hình 2.45

Diện tích của tam giác đều *BCD* là :

$S = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24r^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{3}\cdot$

Thể tích hình chóp *A.BCD* là : $V = \frac{1}{3}\frac{2r^2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4r}{3} = \frac{8\sqrt{3}\,r^3}{27}\cdot$

Hai hình chóp *A.BCD* và *A'.BCD* có chung mặt đáy *BCD* nên

$\frac{V_{A'.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2}\cdot$ Do đó $V_{A'.BCD} = \frac{4\sqrt{3}\,r^3}{27}\cdot$