§2. MẶT CẦU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM CÓ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

1. Tập hợp tất cả các điểm M trong không gian cách một điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi *là mặt cầu tâm O bán kính r* và thường được kí hiệu là $S(O\ ;\ r)$.

Cho mặt cầu tâm O bán kính r và M là một điểm bất kì trong không gian.

– Nếu $OM = r$ thì ta nói điểm M nằm trên mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

– Nếu $OM < r$ thì ta nói điểm M nằm trong mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

– Nếu $OM > r$ thì ta nói điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

2. Mặt cầu là một mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính AB của nửa đường tròn đó. Giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là *đường kinh tuyến* của mặt cầu. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục gọi là *vĩ tuyến* của mặt cầu.

II- GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng (P). H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó $OH = h$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới mặt phẳng (P). Ta có các trường hợp :

1. Nếu $h > r$: mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu ;

2. Nếu $h = r$: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H. Ta có $OH \perp (P)$;

3. Nếu $h < r$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính

$$r' = \sqrt{r^2 - h^2}\ .$$

Đặc biệt khi $h = 0$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính $r' = r$.

III- GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG, TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và đường thẳng Δ.

1. Trường hợp Δ đi qua tâm O của mặt cầu thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B với $AB = 2r$.

2. Trường hợp Δ không đi qua tâm O của mặt cầu, ta gọi d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ, khi đó :

a) Nếu $d < r$, đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N ;

b) Nếu $d = r$, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm H

(H gọi là tiếp điểm và đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu) ;

c) Nếu $d > r$, đường thẳng Δ không cắt mặt cầu.

☞ ***Chú ý.*** • Qua một điểm A bất kì trên mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu và đều nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tại A. Mặt phẳng tiếp xúc này vuông góc với đường thẳng OA tại A.

• Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đó. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ M đến các tiếp điểm đều bằng nhau. Tất cả các tiếp tuyến này tạo nên một mặt nón tròn xoay có đỉnh là M và có đường tròn đáy nằm trên mặt cầu.

IV- CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Gọi S là diện tích mặt cầu bán kính r, ta có công thức : $S = 4\pi r^2$.

☞ ***Chú ý.*** • Ta có diện tích hình tròn lớn của khối cầu bán kính r là $s = \pi r^2$. Do đó ta cần lưu ý rằng $S = 4s = 4\pi r^2$.

• Người ta chứng minh được công thức tính thể tích V của khối cầu bán kính r là : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu thoả mãn một số điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Muốn xác định tâm và bán kính của mặt cầu chúng ta cần dựa vào các mệnh đề sau đây :

a) Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng bằng r cho trước là mặt cầu tâm O bán kính r ;

b) Tập hợp tất cả những điểm M nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB ;

c) Tập hợp tất cả những điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới hai điểm A, B cố định bằng một hằng số k^2 là mặt cầu có tâm là trung điểm O của đoạn AB và bán kính $r = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$;

d) Mặt cầu là mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính AB của nửa đường tròn đó.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu trong các trường hợp sau đây :

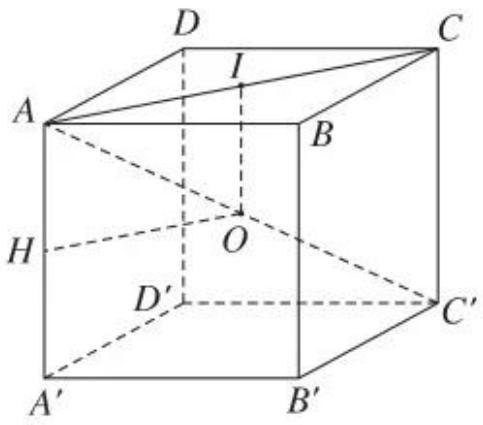
a) Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương ;

b) Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương ;

c) Tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương.

Giải

a) (h.2.8) Gọi O là trung điểm của đường chéo AC'. Ta có O cách đều 8 đỉnh của hình lập phương. Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương cạnh a có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 2.8

b) Gọi H là trung điểm của cạnh AA'. Ta có $OH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy mặt cầu tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và bán kính $r' = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

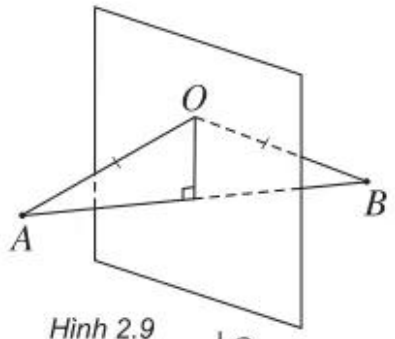
c) Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OI = \frac{a}{2}$. Vậy mặt cầu tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính r'' bằng khoảng cách từ O tới 6 mặt bên của hình lập phương. Ta có $r'' = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng có vô số mặt cầu đi qua hai điểm cố định A, B cho trước. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đó.

Giải

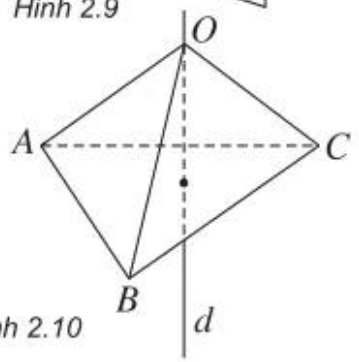
(h.2.9) Điều kiện cần và đủ để O là tâm mặt cầu đi qua hai điểm cố định A và B là $OA = OB$. Điều này chứng tỏ điểm O thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Vậy có vô số mặt cầu đi qua hai điểm A, B cho trước và tâm các mặt cầu đó thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.



Hình 2.9

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng có vô số mặt cầu đi qua ba đỉnh A, B, C của một tam giác cố định cho trước. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đó.



Hình 2.10

Giải

(h.2.10) Điều kiện cần và đủ để cho điểm O là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C là $OA = OB = OC$. Điều này chứng tỏ điểm O thuộc mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, đồng thời điểm O cũng thuộc mặt phẳng (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn BC. Vì (α) và (β) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) cắt nhau theo một giao tuyến d. Vậy có vô số mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng cho trước và tâm của các mặt cầu ấy nằm trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Người ta thường gọi d là trục của tam giác ABC.

VẤN ĐỀ 2

Xét vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Cần xác định khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P) và so sánh với bán kính r của mặt cầu cho trước.

– Nếu $d > r$, mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu.

– Nếu $d = r$, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm duy nhất.

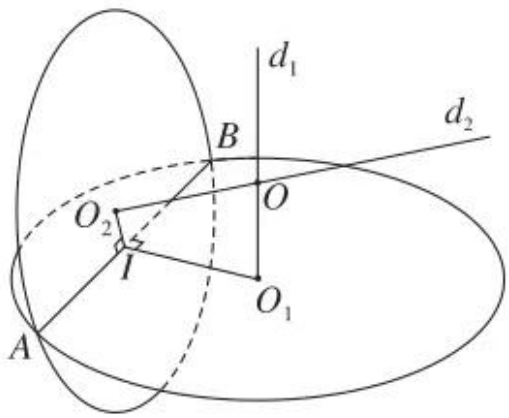
– Nếu $d < r$, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$. Đặc biệt nếu $d = 0$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB. Chứng minh rằng có một mặt cầu chứa cả hai đường tròn ấy.

Giải

(h.2.11) Gọi O_1 và O_2 là các tâm của hai đường tròn có chung dây cung là AB và gọi d_1, d_2 là các đường thẳng lần lượt qua O_1, O_2 và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng chứa các đường tròn đó.



Hình 2.11

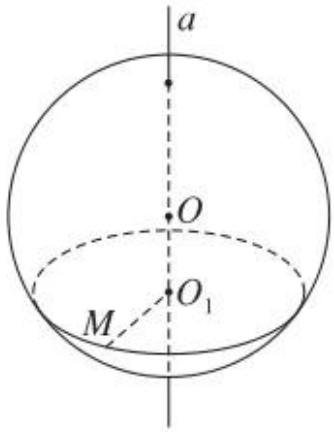
Ta biết rằng d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ nhất, d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ hai. Ta chỉ cần chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm O nào đó để suy ra mặt cầu tâm O bán kính OA là mặt cầu chứa cả hai đường tròn cho trước.

Thật vậy, gọi I là trung điểm của dây cung AB thì O_1I và O_2I đều vuông góc với AB. Vì hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng khác nhau nên ta có AB vuông góc với mặt phẳng (IO_1O_2). Mặt khác d_1 và d_2 đều vuông góc với AB nên d_1 và d_2 đều nằm trong mặt phẳng (IO_1O_2). Trong mặt phẳng (IO_1O_2), d_1 và d_2 lần lượt vuông góc với hai đường thẳng giao nhau O_1I và O_2I nên d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm O. Ta có mặt cầu tâm O là mặt cầu cần tìm.

Ví dụ 2. Cho một đường thẳng a cố định và một điểm M cố định nằm ngoài đường thẳng a. Chứng minh rằng khi điểm O thay đổi trên đường thẳng a, các mặt cầu tâm O bán kính $r = OM$ luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

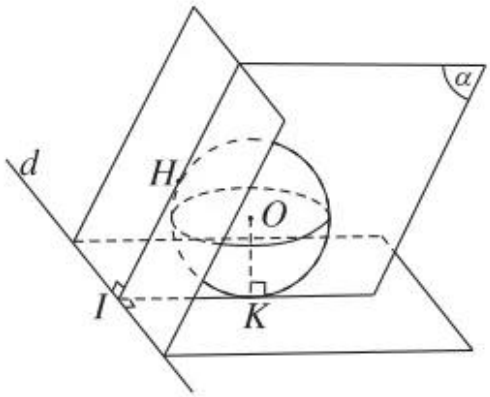
Giải

(h.2.12) Gọi $(\mathscr{S})$ là mặt cầu có tâm O thuộc đường thẳng cố định a và đi qua điểm M cố định không thuộc a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a tại điểm O_1 thì O_1 cố định và đoạn O_1M không đổi. Khi đó mặt phẳng (α) cắt mặt cầu $(\mathscr{S})$ theo đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M. Đường tròn giao tuyến thu được là cố định vì có tâm O_1 cố định, bán kính $r_1 = O_1M$ không đổi và nằm trong mặt phẳng (α) cố định. Vậy với mỗi điểm O thay đổi trên đường thẳng a cố định, có một mặt cầu tâm O bán kính OM luôn luôn đi qua một đường tròn cố định nằm trong mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với a. Đường tròn này là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt cầu tâm O bán kính OM.



Hình 2.12

Ví dụ 3. Cho đường thẳng d không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ r)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng d. Xác định giao tuyến của (α) với mặt cầu cho trước và chứng minh rằng có hai mặt phẳng đi qua d và tiếp xúc với mặt cầu.



Hình 2.13

Giải

(h.2.13) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng d tại I. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn tâm O có bán kính r và tất nhiên đường tròn này thuộc (α).

Trong mặt phẳng (α) gọi IH và IK là hai tiếp tuyến của đường tròn lớn đó cùng đi qua điểm I. Khi đó mặt phẳng (d, H) và mặt phẳng (d, K) là hai mặt phẳng đi qua d và tiếp xúc với mặt cầu. Thật vậy ta có $OK \perp d$ vì OK thuộc (α), mặt khác $OK \perp IK$, do đó OK vuông góc với mặt phẳng (d, K) nên mặt phẳng (d, K) tiếp xúc với mặt cầu. Tương tự ta chứng minh mặt phẳng (d, H) tiếp xúc với mặt cầu. Như vậy ta có hai mặt phẳng đi qua d tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ cho trước.

VẤN ĐỀ 3

Xét vị trí tương đối của một mặt cầu và một đường thẳng

1. Phương pháp giải

* Xét khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng cho trước :

a) Nếu $d < r$, đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm ;

b) Nếu $d = r$, đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu ;

c) Nếu $d > r$, đường thẳng không cắt mặt cầu.

* Có thể sử dụng các kiến thức về hệ thức lượng trong tam giác và hệ thức lượng trong đường tròn trong mặt phẳng để giải toán.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và một điểm A biết $OA = 2r$. Qua A kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại B và kẻ một cát tuyến cắt mặt cầu tại C và D. Cho biết $CD = r\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài đoạn AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

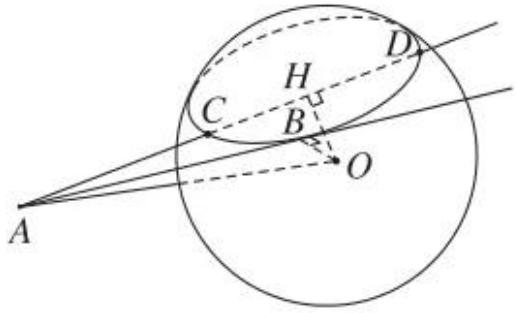
Giải

a) (h.2.14) Ta có AB là tiếp tuyến của mặt cầu tại B nên $AB \perp OB$.

Do đó $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên CD. Ta có : $OC = OD = r$ nên tam giác OCD cân tại O và H là trung điểm của đoạn CD, nghĩa là $HC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. Vậy khoảng cách từ O đến CD là độ dài đoạn OH với

$$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}.$$

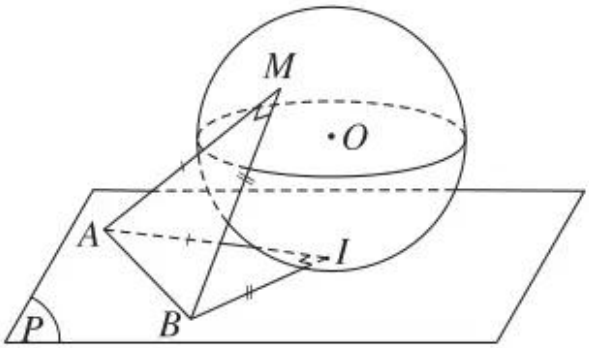


Hình 2.14

Ví dụ 2. Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại A và B. Chứng minh rằng : $AB^2 = AI^2 + IB^2$.

Giải

(h.2.15) Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại I nên AI và BI là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại I. Mặt khác MA và MB là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại M. Như vậy từ một điểm A ngoài mặt cầu ta có hai tiếp tuyến AM và AI nên $AM = AI$. Lí luận tương tự ta có $BM = BI$. Ta có hai tam giác ABM và ABI bằng nhau theo trường hợp (c. c. c) nên $\widehat{AMB} = \widehat{AIB} = 90^o$.

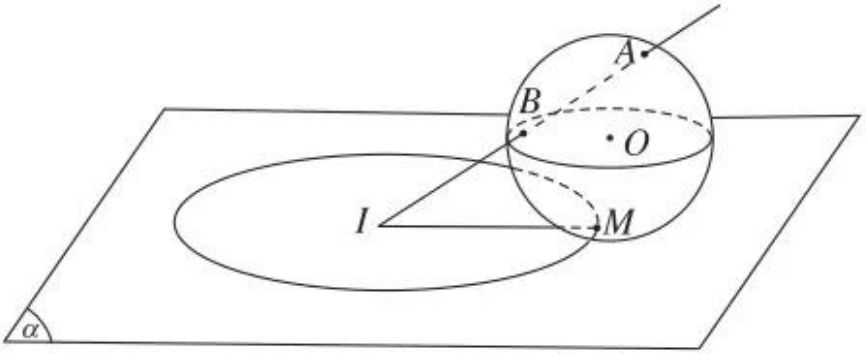


Hình 2.15

Do đó $AB^2 = AI^2 + IB^2$ (định lí Py-ta-go).

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (α) và hai điểm A, B nằm về một phía của (α) sao cho đường thẳng AB cắt (α) tại I. Tìm tập hợp các tiếp điểm của mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

Giải



Hình 2.16

(h.2.16) Giả sử mặt cầu tâm O đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại M. Mặt phẳng (ABM) cắt mặt cầu đó theo đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng IM tại M.

Do đó điểm M nằm trên đường tròn tâm I bán kính $r' = \sqrt{IA.IB}$ và đường tròn này nằm trong mặt phẳng (α).

Ngược lại, lấy điểm M bất kì nằm trên đường tròn đó. Ta gọi O là giao điểm của đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) tại M và mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Do đó mặt cầu tâm O bán kính OM đi qua B và tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại M. Vì $IA.IB = IM^2$ nên mặt cầu đó cũng đi qua A.

VẤN ĐỀ 4

Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và hình lăng trụ

1. Phương pháp giải

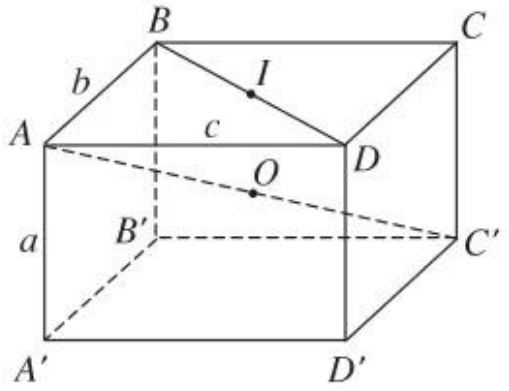
Muốn chứng minh mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp hoặc một hình lăng trụ ta cần chứng minh mặt cầu đó đi qua tất cả các đỉnh của hình chóp hoặc của hình lăng trụ. Sau đó cần xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp. Chú ý rằng điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp ; điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đó phải là một hình lăng trụ đứng và có đáy là một đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$.

a) Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó.

b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$ với mặt cầu trên.



Hình 2.17

Giải

(h.2.17) Giả sử hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = b$, $AD = c$, $AA' = a$. Ta biết rằng các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

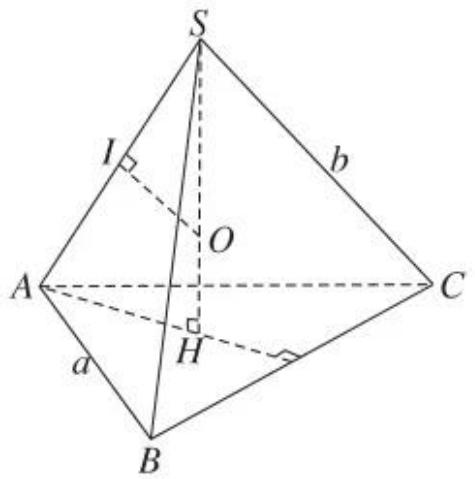
a) Ta có $OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD'$ và $OA = \dfrac{AC'}{2}$, bên cạnh đó $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ nên $r = AO = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Giao tuyến của $(ABCD)$ với mặt cầu trên là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Vậy đường tròn giao tuyến của $(ABCD)$ với mặt cầu trên có tâm là trung điểm I của BD và có bán kính là : $r' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên đều bằng b. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải

(h.2.18) Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó nằm trên đường cao SH trong đó H là trọng tâm của tam giác đều ABC.



Hình 2.18

Gọi I là trung điểm của cạnh SA. Ta có $OI \perp SA$. Khi đó hai tam giác vuông SIO và SHA đồng dạng. Từ đó ta suy ra :

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH}.$$

Do đó $SO = \frac{SA^2}{2SH} = r$.

Mà $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2$ nên $SH = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Vậy $r = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{b^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

Ví dụ 3. Ba đoạn thẳng SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau tạo thành một tứ diện $SABC$ với $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

Giải

Cách 1. (h.2.19) Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Ta có M là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông SAB. Từ M kẻ $Mx \parallel SC$. Mặt phẳng trung trực của đoạn SC cắt Mx tại O.

Ta có $OA = OB = OC = OS$.

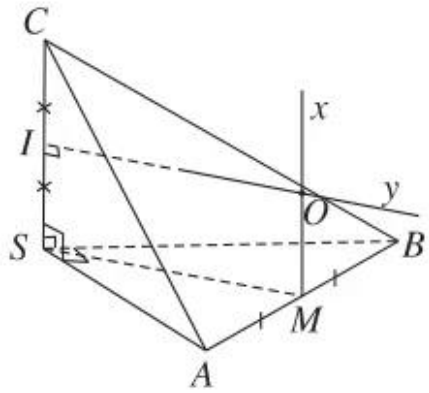
Như vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

Ta có $r^2 = OS^2 = SM^2 + MO^2$

$$= \frac{AB^2}{4} + \frac{SC^2}{4} = \frac{1}{4}(SA^2 + SB^2 + SC^2)$$

(vì $AB^2 = SA^2 + SB^2$).

Vậy $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 2.19

Cách 2. Từ ba cạnh SA, SB, SC ta dựng được hình hộp chữ nhật nhận SA, SB, SC là ba cạnh xuất phát từ đỉnh S. Khi đó tâm của hình hộp chữ nhật là tâm của mặt cầu phải tìm và bán kính mặt cầu bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo hình hộp chữ nhật đó. Ta suy ra $r = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp đó và tính thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu ngoại tiếp đó.

Giải

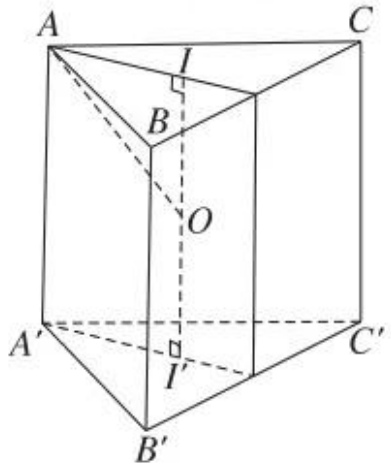
(h.2.20) Gọi I và I' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đáy lăng trụ. Như vậy I và I' đồng thời cũng là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ấy và nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với đường thẳng II'. Ta suy ra trung điểm O của đoạn II' chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp đi qua 6 đỉnh của lăng trụ đã cho.

Mặt cầu này có bán kính

$r = OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$.

Ta có : $OA^2 = AI^2 + IO^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$.

Vậy $r = OA = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.



Hình 2.20

Từ đó ta tính được diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3}.$$

Gọi V là thể tích khối cầu.

Ta có : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3$. Vậy : $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.13. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (α) ta lấy một điểm S tuỳ ý, dựng mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Mặt phẳng (β) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B', C', D' luôn luôn thuộc một mặt cầu cố định.

b) Tính diện tích của mặt cầu đó và tính thể tích khối cầu được tạo thành.

2.14. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và có chiều cao bằng h. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu đó.

2.15. Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' có AA' là đoạn vuông góc chung, trong đó $A \in \Delta$ và $A' \in \Delta'$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với Δ' và cho biết $AA' = a$. Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng (α) lần lượt cắt Δ và Δ' tại M và M'. Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) là M_1.

a) Xác định tâm O và bán kính r của mặt cầu đi qua 5 điểm A, A', M, M', M_1.

Tính diện tích của mặt cầu tâm O nói trên theo a, $x = A'M'$ và góc $\varphi = (\Delta, \Delta')$.

b) Chứng minh rằng khi x thay đổi mặt cầu tâm O luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

2.16. Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau :

a) $\widehat{BAC} = 90^o$; b) $\widehat{BAC} = 60^o$ và $b = c$; c) $\widehat{BAC} = 120^o$ và $b = c$.

2.17. Cho mặt cầu tâm O bán kính r. Gọi (α) là mặt phẳng cách tâm O một khoảng h $(0 < h < r)$ và cắt mặt cầu theo đường tròn $(\mathscr{C})$. Đường thẳng d đi qua một điểm A cố định trên $(\mathscr{C})$ và vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại một điểm B. Gọi CD là một đường kính di động của $(\mathscr{C})$.

a) Chứng minh các tổng $AD^2 + BC^2$ và $AC^2 + BD^2$ có giá trị không đổi.

b) Với vị trí nào của CD thì diện tích tam giác BCD lớn nhất ?

c) Tìm tập hợp các điểm H, hình chiếu vuông góc của B trên CD khi CD chuyển động trên đường tròn $(\mathscr{C})$.

2.18. Hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua đỉnh A và tiếp xúc với hai cạnh SB, SC tại trung điểm của mỗi cạnh.

a) Chứng minh rằng mặt cầu đó đi qua trung điểm của AB và AC.

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D. Tính độ dài của AD và SD.

2.19. Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì hình tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

2.20. Hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và có đường cao AH. Gọi O là trung điểm của AH. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$.

2.21. Hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ là chiều cao của hình chóp và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$ và $AD = 2a$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

2.22. Cho hình cầu tâm O bán kính r. Lấy một điểm A trên mặt cầu và gọi (α) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (α) bằng 30°.

a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu.

b) Đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

2.23 Cho hình cầu đường kính $AA' = 2r$. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \dfrac{4r}{3}\cdot$ Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn $(\mathscr{C})$.

a) Tính diện tích của hình tròn $(\mathscr{C})$.

b) Gọi BCD là tam giác đều nội tiếp trong $(\mathscr{C})$, hãy tính thể tích hình chóp $A.BCD$ và hình chóp $A'.BCD$.