

## § . PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

**3.17.** a) Phương trình  $(\alpha)$  có dạng :  $(x - 2) + (y) + (z - 1) = 0$  hay  $x + y + z - 3 = 0$ .

b) Hai vectơ có giá song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  là :  $\vec{u} = (0 ; 1 ; 1)$  và  $\vec{v} = (-1 ; 0 ; 2)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (2 ; -1 ; 1)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $A(1 ; 0 ; 0)$  và nhận  $\vec{n} = (2 ; -1 ; 1)$  là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $2(x - 1) - y + z = 0$  hay  $2x - y + z - 2 = 0$ .

c) Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là :  $\overrightarrow{MN} = (3 ; 2 ; 1)$

và  $\overrightarrow{MP} = (4 ; 1 ; 0)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = (-1 ; 4 ; -5)$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $-1(x - 1) + 4(y - 1) - 5(z - 1) = 0$

hay  $x - 4y + 5z - 2 = 0$ .

**3.18.** Đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm là  $I(2 ; 2 ; 3)$ .

Mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$  đi qua  $I$  và có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \overrightarrow{IB} = (1 ; 4 ; -1)$ . Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$  là :

$1(x - 2) + 4(y - 2) - 1(z - 3) = 0$  hay  $x + 4y - z - 7 = 0$ .

**3.19.** a) Ta có :  $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$  và  $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$ , suy ra  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4; 4; 4)$ .

Do đó ( $ABC$ ) có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (4; 4; 4)$  hoặc  $\vec{n}' = (1; 1; 1)$ .

Suy ra phương trình của ( $ABC$ ) là :  $(x - 5) + (y - 1) + (z - 3) = 0$

$$\text{hay } x + y + z - 9 = 0.$$

b) Mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua điểm  $D$  và song song với mặt phẳng ( $ABC$ ) nên ( $\alpha$ ) cũng có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}' = (1; 1; 1)$ .

Vậy phương trình của ( $\alpha$ ) là :  $(x - 4) + (y) + (z - 6) = 0$  hay  $x + y + z - 10 = 0$ .

**3.20.** Mặt phẳng ( $\alpha$ ) song song với mặt phẳng ( $\beta$ ) :  $x + y + 2z - 7 = 0$ .

Vậy phương trình của ( $\alpha$ ) có dạng :  $x + y + 2z + D = 0$ .

( $\alpha$ ) đi qua gốc toạ độ  $O(0; 0; 0)$  suy ra  $D = 0$ .

Vậy phương trình của ( $\alpha$ ) là  $x + y + 2z = 0$ .

**3.21.** Mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua hai điểm  $A, B$  và vuông góc với mặt phẳng ( $\beta$ ) :  $x + 2y - z = 0$ .

Vậy hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên ( $\alpha$ ) là  $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$  và  $\vec{n}_\beta = (1; 2; -1)$ .

Suy ra ( $\alpha$ ) có vectơ pháp tuyến là :  $\vec{n}_\alpha = (-4; 3; 2)$ .

Vậy phương trình của ( $\alpha$ ) là :  $-4(x) + 3(y - 1) + 2(z) = 0$  hay  $4x - 3y - 2z + 3 = 0$ .

**3.22.**  $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{-1}{B} = \frac{3}{6} \neq \frac{2}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2. \end{cases}$

**3.23.** a)  $d(M, (\alpha)) = \frac{|1+4+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2$ .

b)  $d(M, (\beta)) = \frac{|3+25|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{5}$ .

c)  $d(M, (\gamma)) = \frac{|5|}{\sqrt{1}} = 5$ .

**3.24.** Xét điểm  $M(x; y; z)$ . Ta có :  $M$  cách đều hai mặt phẳng ( $\alpha$ ) và ( $\beta$ )

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d(M, (\alpha)) = d(M, (\beta)) &\Leftrightarrow \frac{|3x - y + 4z + 2|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{|3x - y + 4z + 8|}{\sqrt{9+1+16}} \\ &\Leftrightarrow 3x - y + 4z + 5 = 0. \end{aligned}$$

**3.25.** Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ là :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad D(0; 1; 0), \\ B'(1; 0; 1), \quad D'(0; 1; 1), \quad C'(1; 1; 1).$$

a) Phương trình của hai mặt phẳng  $(AB'D')$  và  $(BC'D)$  là :  $x + y - z = 0$   
và  $x + y - z - 1 = 0$ .

Ta có :  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$ . Vậy  $(AB'D') \parallel (BC'D)$ .

b)  $d((AB'D'), (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**3.26.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(\beta)$  và  $(\gamma)$ , do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\beta = (3; -2; 2)$  và  $\vec{n}_\gamma = (5; -4; 3)$

Suy ra  $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (2; 1; -2)$ .

Mặt khác  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(3; -1; -5)$  và có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha$ , vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $2(x - 3) + 1(y + 1) - 2(z + 5) = 0$   
hay  $2x + y - 2z - 15 = 0$ .

**3.27.** Hình chiếu của điểm  $A(2; 3; 4)$  lên các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt là  $B(2; 0; 0), C(0; 3; 0), D(0; 0; 4)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $B, C, D$  nên  $(\alpha)$  có phương trình theo đoạn chấn là :  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  hay  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ .

**3.28.** a)  $(\alpha_1) \parallel (\alpha'_1)$  ;      b)  $(\alpha_2)$  cắt  $(\alpha'_2)$  ;      c)  $(\alpha_3)$  trùng với  $(\alpha'_3)$ .

**3.29.** Mặt phẳng  $(\beta)$  song song với trục  $Oy$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  :  $2x - y + 3z + 4 = 0$ , do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\beta)$  là :  $\vec{j} = (0; 1; 0)$  và  $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3)$ .

Suy ra  $(\beta)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\beta = \vec{j} \wedge \vec{n}_\alpha = (3; 0; -2)$ .

Mặt phẳng  $(\beta)$  đi qua điểm  $M(2; -1; 2)$  có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\beta = (3; 0; -2).$$

Vậy phương trình của  $(\beta)$  là :  $3(x - 2) - 2(z - 2) = 0$  hay  $3x - 2z - 2 = 0$ .

**3.30.** Gọi giao điểm của ( $\alpha$ ) với ba tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt là  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$  ( $a, b, c > 0$ ).

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) \text{ có phương trình theo đoạn chẵn là : } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

Do ( $\alpha$ ) đi qua  $M(1; 2; 3)$  nên ta thay toạ độ của điểm  $M$  vào (1) :

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

Thể tích của tứ diện  $OABC$  là  $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$ .

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có : } 1 &= \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc} \\ &\Rightarrow abc \geq 27.6 \Rightarrow V \geq 27. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } V \text{ đạt giá trị nhỏ nhất } \Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng ( $\alpha$ ) thoả mãn đề bài là :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \text{ hay } 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$