§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1.10. (h.1.18) Kẻ $SH \perp (ABC)$. Đường thẳng AH cắt BC tại I.

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên H là trọng tâm của ΔABC.

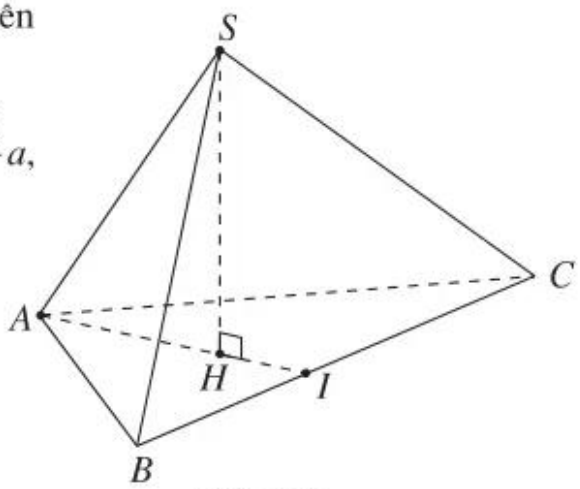
Do đó $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

$\widehat{SAH} = 60^o$.

$SH = AH.\tan 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}a.\sqrt{3} = a.$

Thể tích khối chóp S.ABC là :

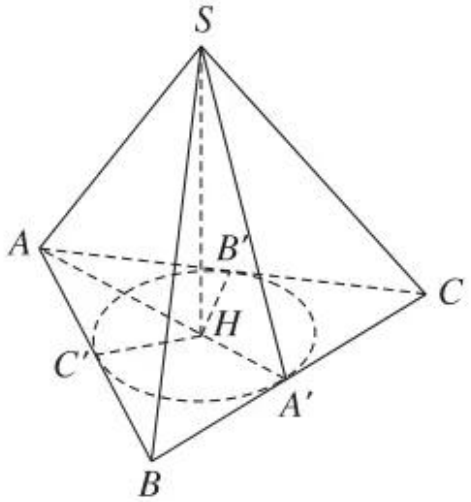
$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a.a.a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.



Hình 1.18

1.11. (h.1.19) Kẻ $SH \perp (ABC)$ và HA', HB', HC' lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SA' \perp BC$, $SB' \perp CA$, $SC' \perp AB$.

Từ đó suy ra $\widehat{SA'H} = \widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^o$. Do đó các tam giác vuông SHA', SHB', SHC' bằng nhau. Từ đó suy ra $HA' = HB' = HC'$. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC cân ở A nên AH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Từ đó suy ra A, H, A' thẳng hàng và A' là trung điểm của BC.



Hình 1.19

Do đó $AA'^2 = AB^2 - BA'^2 = 25a^2 - 9a^2 = 16a^2$.

Vậy $AA' = 4a$.

Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

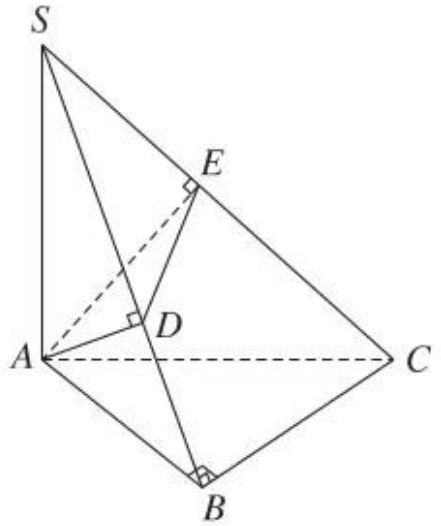
Khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar$.

Từ đó suy ra $r = \frac{3}{2}a$.

Do đó $SH = HA'.\tan 60^o = \frac{3a}{2}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}\cdot 12a^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a = 6\sqrt{3}a^3$.

1.12. (h.1.20) a) Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.



Hình 1.20

Vì $AD \subset (SAB)$ nên $AD \perp BC$.

Mặt khác $AD \perp SB$ nên $AD \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $AD \perp SC$.

$\begin{cases} SC \perp AE \\ SC \perp AD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ADE) \Rightarrow SC \perp DE$

hay $SE \perp (ADE)$.

Trong tam giác vuông SAB ta có :

$SA.AB = AD.SB \Rightarrow AD = \frac{AB.SA}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Tương tự, trong tam giác vuông SAC ta có : $AE = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Do $AD \perp (SBC)$ nên $AD \perp DE$. Từ đó suy ra

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}$$

$$SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Vậy $V_{S.ADE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD.DE.SE$

$$= \frac{1}{6}\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}\cdot\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{abc^5}{6(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}.$$

b) Gọi d là khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAB).

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

$$V_{S.ADE} = V_{E.SAD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SD.AD.d = \frac{1}{6}\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}d = \frac{1}{6}\frac{ac^3}{a^2+c^2}d.$$

Kết hợp với kết quả trong câu a) ta suy ra $d = \frac{bc^2}{a^2+b^2+c^2}$.

1.13. Ta có tứ diện đều $ABCD$, M là một điểm trong của nó. Gọi V là thể tích, S là diện tích mỗi mặt của tứ diện đều $ABCD$, h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC).

Khi đó ta có $V = V_{MBCD} + V_{MCDA} + V_{MDAB} + V_{MABC} = \frac{1}{3}S\left(h_A + h_B + h_C + h_D\right)$.

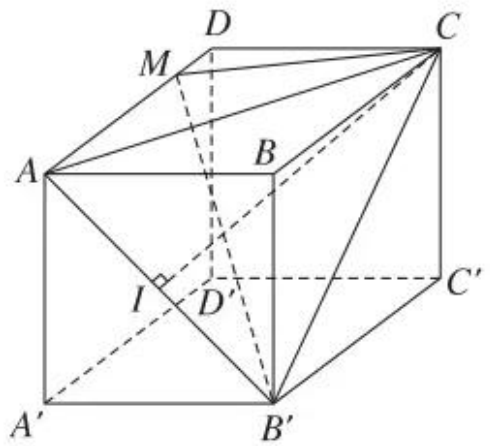
Từ đó suy ra $h_A + h_B + h_C + h_D = \frac{3V}{S}$.

1.14. (h.1.21) a) Thể tích khối chóp $M.AB'C$ bằng thể tích khối chóp $B'.AMC$. Ta có

$S_{AMC} = \frac{3}{4}S_{ADC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a^2 = \frac{3a^2}{4}$.

Do đó $V_{M.AB'C} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot a = \frac{a^3}{4}$.

b) Gọi h là khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.



Hình 1.21

Khi đó $V_{M.AB'C} = \frac{1}{3}S_{AB'C}.h = \frac{a^3}{4}$.

Vì $AC^2 = B'C^2 = 5a^2$ nên tam giác ACB' cân tại C. Do đó đường trung tuyến CI của tam giác ACB' cũng là đường cao.

Ta có : $CI^2 = CA^2 - AI^2 = 5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{9a^2}{2}$.

Do đó $CI = \frac{3a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{AB'C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{\sqrt{2}}\cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}$.

Từ đó suy ra $h = 3\frac{a^3}{4} : \frac{3a^2}{2} = \frac{a}{2}$.

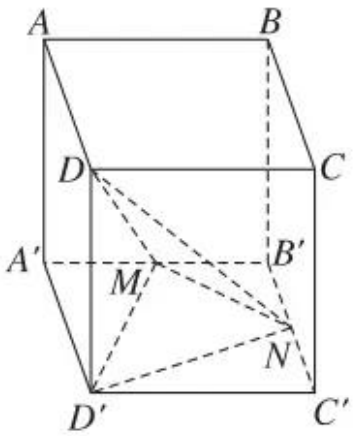
1.15. (h.1.22) Thể tích khối chóp $D'.DMN$ bằng thể tích khối chóp $D.D'MN$.

Ta có $S_{D'MN} = S_{A'B'C'D'} - (S_{D'A'M} + S_{D'C'N} + S_{B'MN})$

$$= ab - (\frac{ab}{4} + \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4}) = \frac{3ab}{8}.$$

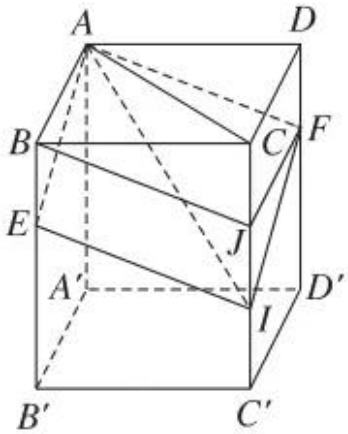
Thể tích khối chóp $D'.DMN = \frac{1}{3}\cdot\frac{3ab}{8}\cdot c = \frac{abc}{8}$.

Từ đó suy ra tỉ số giữa thể tích khối chóp $D'.DMN$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{1}{8}$.



Hình 1.22

1.16. (h.1.23) Giả sử (AEF) cắt CC' tại I. Khi đó ta có $AE \parallel FI$, $AF \parallel EI$ nên tứ giác $AEIF$ là hình bình hành. Trên cạnh CC' lấy điểm J sao cho $CJ = DF$. Vì CJ song song và bằng DF nên JF song song và bằng CD. Do đó tứ giác $CDFJ$ là hình chữ nhật. Từ đó suy ra FJ song song và bằng AB. Do đó AF song song và bằng BJ. Vì AF cũng song song và bằng EI nên BJ song song và bằng EI. Từ đó suy ra $IJ = EB = DF = JC = \frac{c}{3}$.



Hình 1.23

Ta có $S_{BCIE} = \frac{1}{2}\left(\frac{c+2c}{3}\right)b = \frac{bc}{2}$,

$$S_{DCIF} = \frac{1}{2}\left(\frac{c+2c}{3}\right)a = \frac{ac}{2}$$

nên $V_{(H)} = V_{A.BCIE} + V_{A.DCIF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{2}\cdot a + \frac{1}{3}\cdot\frac{ac}{2}\cdot b = \frac{abc}{3}$.

Vì thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng abc nên $V_{(H')} = \frac{2}{3}abc$.

Từ đó suy ra $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$.

1.17. (h.1.24) Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng $A'B'$ tại I và cắt đường thẳng $A'D'$ tại J. AI cắt BB' tại L, AJ cắt DD' tại M. Gọi V_0 là thể tích khối tứ diện $AA'IJ$. V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

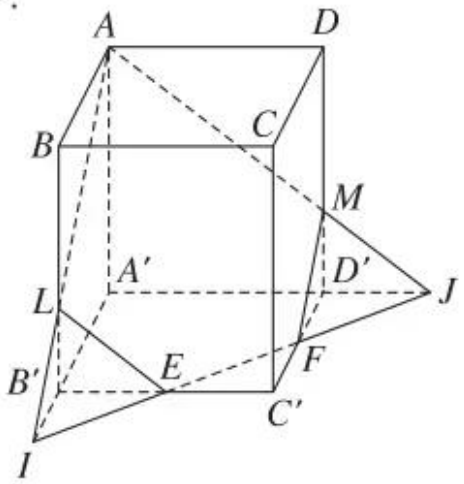
Vì $EB' = EC'$ và $B'I \,//\, C'F$ nên $IB' = FC' = \frac{A'B'}{2}$.

Do đó $\frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}$.

Để ý rằng $B'E \,//\, A'J$, $B'L \,//\, A'A$.

Ta có $\frac{IL}{IA} = \frac{IE}{IJ} = \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra : $\frac{V_{I.ELB'}}{V_{I.JAA'}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.



Hình 1.24

Do đó $V_{I.ELB'} = \frac{1}{27}V_0$.

Tương tự $V_{J.MFD'} = \frac{1}{27}V_0$.

Gọi $AB = a$, $BC = b$, đường cao hạ từ A xuống $(A'B'C'D')$ là h thì

$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = hab.\sin\widehat{BAD}$, $V_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3b}{2}\cdot\sin\widehat{BAD}\right)h = \frac{3V}{8}$.

Vậy $V_{(H)} = V_0 - \frac{2}{27}V_0 = \frac{25}{27}V_0 = \frac{25}{27}\cdot\frac{3V}{8} = \frac{25}{72}V$, $V_{(H')} = \frac{47}{72}V$, $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{25}{47}$.