§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- *Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là* $V = \frac{1}{3}Bh$.
- *Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là* $V = Bh$.
- *Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích đáy và chiều cao của nó.*
- *Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.*

☞ ***Chú ý.*** i) Tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng.

ii) Trong một số bài toán ta thường sử dụng kết quả sau :

Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Tính thể tích của một khối đa diện

1. Phương pháp giải

a) Chia khối đa diện đã cho thành các khối lăng trụ hoặc các khối chóp đơn giản hơn.

b) Ghép thêm vào khối đa diện đã cho các khối đa diện quen biết để được một khối đa diện đơn giản hơn.

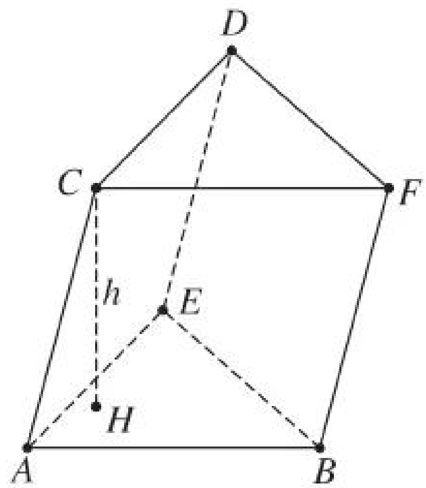
c) Tìm tỉ số thể tích giữa khối đa diện đã cho với một khối đa diện đã biết thể tích.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đoạn thẳng AB và CD chéo nhau. $AB = a$, $CD = b$, khoảng cách giữa chúng bằng h, góc giữa chúng bằng α. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

Giải

Dựng các hình bình hành $ACDE$ và $CABF$. Ta được hình lăng trụ $ABE.CFD$. (h.1.10)



Hình 1.10

Ta có : h = d(AB, CD) = d((ABE), (CDF)) = chiều cao lăng trụ.

Hai hình chóp $B.ACD$ và $F.ACD$ có cùng đáy và chiều cao nên :

$$V_{B.ACD} = V_{F.ACD}.$$

Hình chóp $F.ACD$ và lăng trụ có cùng đáy ACD và chiều cao h nên :

$$V_{F.ACD} = \frac{1}{3}V_{ABE.CFD}.$$

Vậy $V_{B.ACD} = \frac{1}{3}V_{ABE.CFD} = \frac{1}{6}hab\sin\alpha.$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện $CDEF$ theo a.

Giải

(h.1.11) Ta có : $\begin{cases} BA \perp CD \\ BA \perp CA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ADC) \Rightarrow BA \perp CE.$

Mặt khác $BD \perp (CEF) \Rightarrow BD \perp CE.$

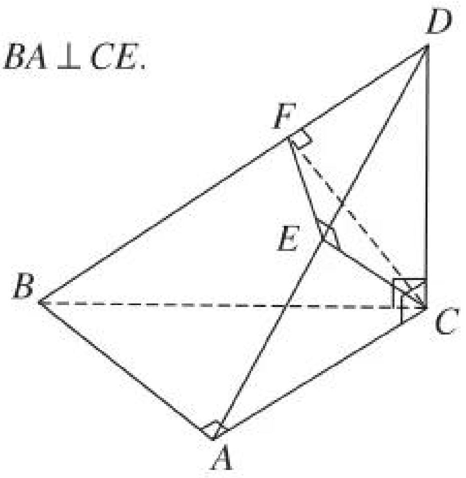
Từ đó suy ra $CE \perp (ABD)$

$\Rightarrow CE \perp EF,\ CE \perp AD.$

Vì tam giác ACD vuông cân,

$CA = CD = a$, nên $CE = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Ta có $BC = a\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$



Hình 1.11

Để ý rằng $CF.BD = DC.BC$. Nên $CF = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Từ đó suy ra $EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{6}}{6},$

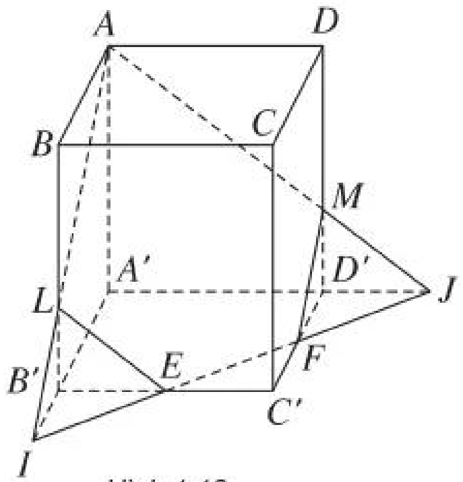
$$DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích tam giác CEF là $S_{\Delta CEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

Thể tích khối tứ diện $DCEF$ là $V_{DCEF} = \frac{1}{3}S_{\Delta CEF}.DF = \frac{a^3}{36}.$

Ví dụ 3. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối hộp đó thành hai khối đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A'. Tìm thể tích của (H) và (H').

Giải



Hình 1.12

(h.1.12) Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng $A'B'$ tại I và cắt đường thẳng $A'D'$ tại J. AI cắt BB' tại L, AJ cắt DD' tại M.

Gọi (K) là tứ diện $AA'IJ$.

Khi đó $V_{(H)} = V_{(K)} - V_{L.B'IE} - V_{M.D'JF}$.

Vì $EB' = EC'$ và $B'I \parallel C'F$

nên $B'I = C'F = \dfrac{A'B'}{2}$. Tương tự, $D'J = \dfrac{A'D'}{2}$.

Từ đó theo định lí Ta-lét ta có $\dfrac{LB'}{AA'} = \dfrac{IB'}{IA'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{MD'}{AA'} = \dfrac{JD'}{JA'} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $V_{L.B'EI} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\right)\cdot\dfrac{c}{3} = \dfrac{abc}{72}\cdot$ Tương tự, $V_{M.D'FJ} = \dfrac{abc}{72}$.

Vì $V_{(K)} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{3b}{2}\right)\cdot c = \dfrac{3abc}{8}$, nên $V_{(H)} = \dfrac{3abc}{8} - \dfrac{2abc}{72} = \dfrac{25abc}{72}$

và $V_{(H')} = \dfrac{47abc}{72}$.

VẤN ĐỀ 2

Dùng cách tính thể tích để giải một số bài toán hình học

1. Phương pháp giải

a) Tính các đại lượng hình học của khối đa diện theo thể tích của khối đa diện ấy.

b) Dùng hai cách để tính thể tích của cùng một khối đa diện rồi so sánh chúng với nhau để rút ra đại lượng hình học cần tìm.

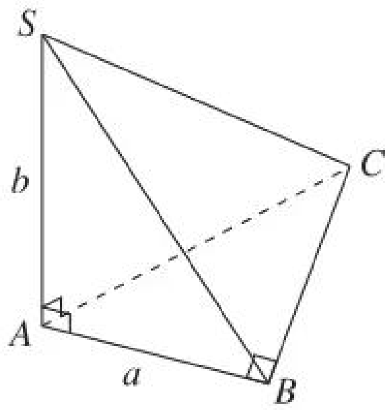
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a$, $SA = b$.

Hãy tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Giải

(h.1.13) Theo định lí ba đường vuông góc, BC vuông góc với hình chiếu AB của đường xiên SB nên BC vuông góc với SB.



Hình 1.13

Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC), V là thể tích hình chóp $S.ABC$ thì

$$V = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{1}{6}h.SB.BC.$$

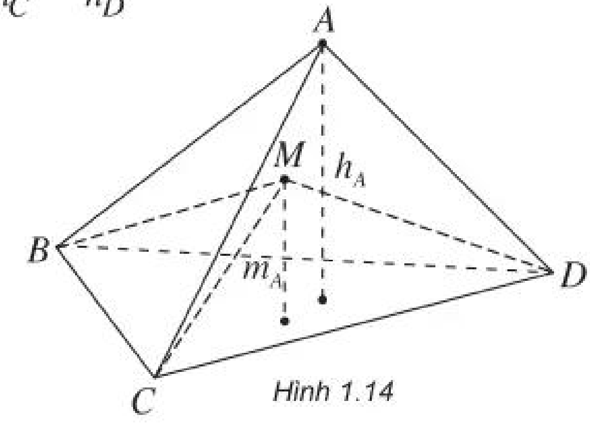
Từ đó suy ra $h = \dfrac{SA.AB.BC}{SB.BC} = \dfrac{SA.AB}{SB}$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm trong của tứ diện đó. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt đối diện và m_A, m_B, m_C, m_D lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Chứng minh rằng $\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D} = 1$.

Giải

(h.1.14) Gọi thể tích các khối tứ diện $ABCD$, $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ theo thứ tự là V, V_A, V_B, V_C, V_D, ta có :



Hình 1.14

$$\frac{V_A}{V} = \frac{m_A}{h_A} \Rightarrow V_A = \frac{m_A}{h_A}V.$$

Tương tự, $V_B = \dfrac{m_B}{h_B}V$, $V_C = \dfrac{m_C}{h_C}V$, $V_D = \dfrac{m_D}{h_D}V$.

Do đó $V = V_A + V_B + V_C + V_D = \left(\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D}\right)V$.

Từ đó suy ra $\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D} = 1$.

VẤN ĐỀ 3

Tìm tỉ số thể tích của hai khối đa diện

1. Phương pháp giải

a) Tính thể tích của từng khối đa diện.

b) Sử dụng chú ý ii) với công thức $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}$.

2. Ví dụ

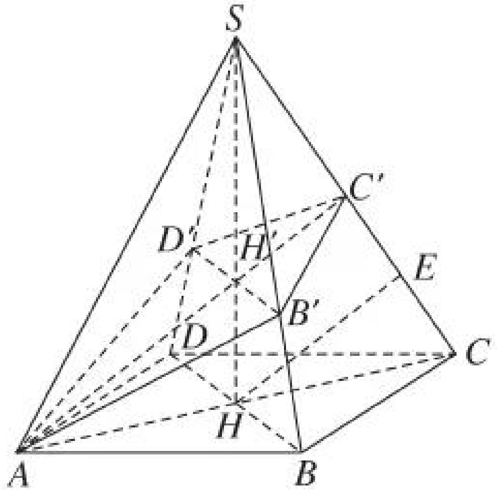
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a$, $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.

Giải

a) (h.1.15) Gọi SH là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, SH cắt (P) tại H'. Khi đó H là giao của AC và BD. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Do đó $BD \,//\, (P)$. Từ đó suy ra (P) cắt (SDB) theo giao tuyến $B'D'$ song song với BD. Do đó $\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SH'}{SH} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$, $H'B' = H'D'$ và $D'B' \perp AC'$. Giả sử đường thẳng qua H song song với AC' cắt SC tại E. Khi đó $EC' = EC$, $\dfrac{SC'}{SE} = \dfrac{2}{3}$.



Hình 1.15

Từ đó suy ra $\dfrac{SE - SC'}{SE} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{EC'}{SE}$.

Do đó $SC' = 2EC' = C'C$.

Ta có : $\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$, $\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$.

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$.

Vậy $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}$.

b) Theo chứng minh trên ta có AC' vừa là đường cao vừa là trung tuyến của ΔSAC nên $AS = AC$. Do đó ΔSAC đều. Từ đó suy ra

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} a.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{6}}{2} a^3 = \frac{\sqrt{6}}{6} a^3.$$

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'D'} = \frac{\sqrt{6}}{18} a^3$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.10. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Hãy tính thể tích của khối chóp đó.

1.11. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Hãy tính thể tích của khối chóp đó.

1.12. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Từ A kẻ các đoạn thẳng AD vuông góc với SB và AE vuông góc với SC. Biết rằng $AB = a$, $BC = b$, $SA = c$.

a) Hãy tính thể tích khối chóp $S.ADE$.

b) Tính khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAB).

1.13. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trong bất kì của một tứ diện đều đến các mặt của nó là một số không đổi.

1.14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3MD$.

a) Tính thể tích khối chóp $M.AB'C$.

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

1.15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$.

Tính tỉ số giữa thể tích khối chóp $D'.DMN$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

1.16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi E và F lần lượt là những điểm thuộc các cạnh BB' và DD' sao cho $BE = \frac{1}{2}EB'$, $DF = \frac{1}{2}FD'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện (H) và (H'). Gọi (H') là khối đa diện chứa đỉnh A'. Hãy tính thể tích của (H) và tỉ số thể tích của (H) và (H').

1.17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia hình hộp đó thành hai hình đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là hình đa diện chứa đỉnh A'. Tính tỉ số giữa thể tích hình đa diện (H) và thể tích hình đa diện (H').