§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.31. a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3 ; 3 ; 1)$ là :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$.

b) $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{a}_{\Delta} = \vec{n}_{\alpha} = (2 ; -1 ; 1)$

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

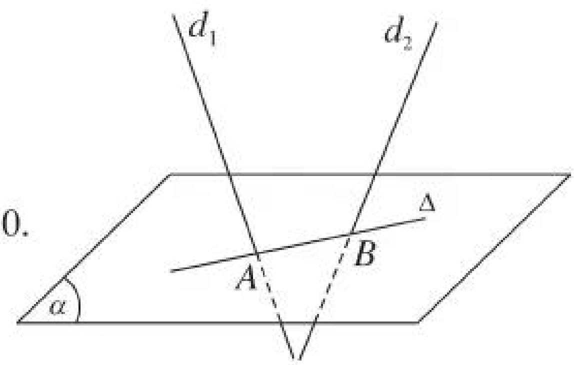
Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\cdot$

c) Δ đi qua hai điểm C và D nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CD}=(1\ ;2\ ;3)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=1+3t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\cdot$

3.32. (h.3.22) Gọi A và B lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với (α). Đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng AB.



Hình 3.22

Ta có $A(1-t\ ;t\ ;4t)\in d_1$

$A\in(\alpha)\Leftrightarrow t+4.(2t)=0\Leftrightarrow t=0.$

Suy ra $A(1\ ;0\ ;0)$.

Ta có $B(2-t'\ ;4+2t'\ ;4)\in d_2$

$B\in(\alpha)\Leftrightarrow 4+2t'+8=0\Leftrightarrow t'=-6.$

Suy ra $B(8\ ;-8\ ;4)$.

Δ đi qua A, B nên có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta=\overrightarrow{AB}=(7\ ;-8\ ;4)$.

Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}\cdot$

3.33. a) Ta có $\vec{a}_d=(1\ ;2\ ;3)$ và $\vec{a}_{d'}=(3\ ;2\ ;2)$.

Suy ra $\vec{n}=\vec{a}_d\wedge\vec{a}_{d'}=(-2\ ;7\ ;-4)$.

Ta có $M_0(-1\ ;1\ ;-2)\in d$, $M'_0(1\ ;5\ ;4)\in d'\Rightarrow\overrightarrow{M_0M'_0}=(2\ ;4\ ;6)$.

Ta có $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0}=-4+28-24=0$. Vậy đường thẳng d và d' đồng phẳng và khác phương, nên d và d' cắt nhau.

b) Ta có $\vec{a}_d=(1\ ;1\ ;-1)$ và $\vec{a}_{d'}=(2\ ;2\ ;-2)$, $M_0(0\ ;1\ ;2)\in d$.

Vì $\begin{cases} \vec{a}_{d'} = 2\vec{a}_d \\ M_0 \notin d' \text{ (toạ độ } M_0 \text{ không thoả mãn } d') \end{cases}$

nên hai đường thẳng d và d' song song.

c) d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (-1 ; 3 ; -2)$,

d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}_{d'} = (0 ; 0 ; 5)$.

Gọi $\vec{n} = \vec{a}_d \wedge \vec{a}_{d'} = (15 ; 5 ; 0) \neq \vec{0}$.

Ta có $M_0(0 ; 0 ; -1) \in d$

$M'_0(0 ; 9 ; 0) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'_0} = (0 ; 9 ; 1)$, $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0} = 45 \neq 0$.

Vậy d và d' là hai đường thẳng chéo nhau.

3.34. Ta có $\vec{a}_d = (1 ; a ; -1)$ và $\vec{a}_{d'} = (2 ; 4 ; -2)$

$$d \,//\, d' \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{4} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow a = 2.$$

Khi đó $M'_0(1 ; 2 ; 2)$ thuộc d' và M'_0 không thuộc d. Vậy $d \,//\, d' \Leftrightarrow a = 2$.

3.35. a) Thay x, y, z trong phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) ta được : $t + 2(1 + 2t) + (1 - t) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại $M_0(0 ; 1 ; 1)$.

b) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d vào phương trình tổng quát của (α) ta được : $(2 - t) + (2 + t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = -9$.

Phương trình vô nghiệm, vậy đường thẳng d song song với (α).

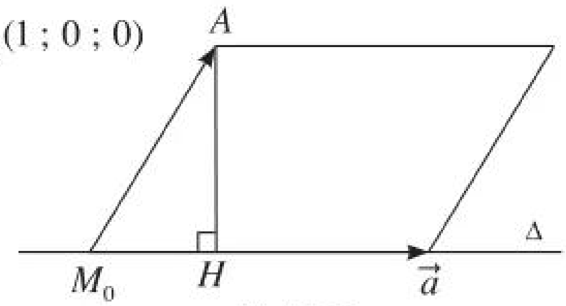
c) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d vào phương trình tổng quát của (α) ta được : $(3 - t) + (2 - t) + (1 + 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$.

Phương trình luôn thoả mãn với mọi t. Vậy d chứa trong (α).

3.36. (h.3.23) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 0 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; 2 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0A} = (0 ; 0 ; 1)$,

$\vec{n} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{M_0A} = (2 ; -2 ; 0)$.



Hình 3.23

$$d(A,\ \Delta) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4+4+0}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến Δ là $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

3.37. a) Ta có : $\vec{a}_\Delta = (2\ ;\ 3\ ;\ 2)$ và $\vec{n}_\alpha = (2\ ;\ -2\ ;\ 1)$

$$\vec{a}_\Delta.\vec{n}_\alpha = 4 - 6 + 2 = 0 \qquad (1)$$

Xét điểm $M_0(-3\ ;\ -1\ ;\ -1)$ thuộc Δ, ta thấy toạ độ M_0 không thoả mãn phương trình của (α). Vậy $M_0 \notin (\alpha)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta \,//\, (\alpha)$.

b) $d(\Delta,\ (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|2.(-3) - 2.(-1) + (-1) + 3|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{2}{3}.$

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) là $\dfrac{2}{3}$.

3.38. a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ'. Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là : $\vec{a} = (1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ và $\vec{a}' = (-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$. Suy ra $\vec{n}_\alpha = (-1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ (h.3.24).

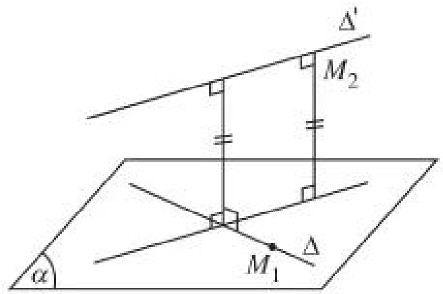
(α) đi qua điểm $M_1(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ thuộc Δ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'_\alpha = (1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) có dạng

$x - 1 + y + 1 = 0$ hay $x + y = 0$.

Ta có : $M_2\ (2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ thuộc đường thẳng Δ'.

$$d(\Delta,\ \Delta') = d(M_2, (\alpha)) = \frac{|2+2|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}.$$



Hình 3.24

b) Hai đường thẳng Δ và Δ' có phương trình là

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta' : \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t'. \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với Δ' là $9x + 5y - 2z - 22 = 0$.

Lấy điểm $M'(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ trên Δ'.

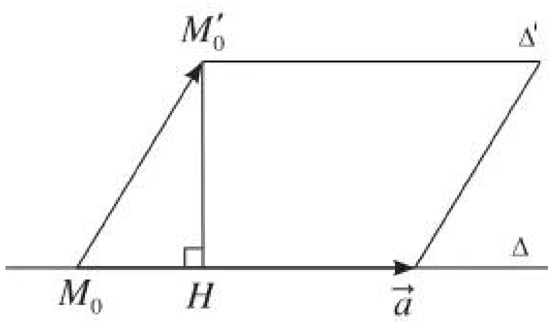
Ta có $d(\Delta,\ \Delta') = d(M', (\alpha)) = \dfrac{|5.(2)-22|}{\sqrt{81+25+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là $\dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

3.39. (h.3.25) a) Δ đi qua điểm $M_0\,(1\,;-3\,;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2\,;1\,;-2)$

Δ' đi qua điểm $M'_0\,(-2\,;1\,;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (-4\,;-2\,;4)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{a}' = -2\vec{a}\\ M_0 \notin \Delta'.\end{cases}$



Hình 3.25

Vậy Δ' song song với Δ.

b) Ta có $\overrightarrow{M_0M'_0} = (-3\,;4\,;-5)$

$\vec{a} = (2\,;1\,;-2)$.

$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{a} = (-3\,;-16\,;-11)$.

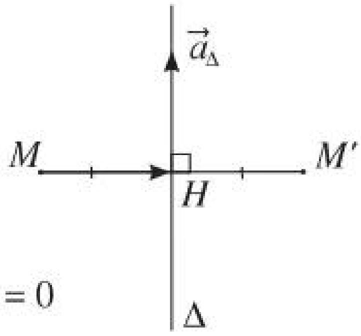
$d(\Delta,\ \Delta') = M'_0H = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{9+256+121}}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{\sqrt{386}}{3}$.

3.40. (h.3.26) a) Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases}x = 1+2t\\ y = -1-t\\ z = 2t.\end{cases}$

Xét điểm $H(1+2t\,;\ -1-t\,;2t) \in \Delta$.

Ta có $\overrightarrow{MH} = (2t-1\,;-t\,;2t-1)$

$\vec{a}_\Delta = (2\,;-1\,;2)$.



Hình 3.26

H là hình chiếu vuông góc của M trên $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\,.\vec{a}_\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 2(2t-1) + t + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{9}$.

Ta suy ra toạ độ điểm $H\left(\dfrac{17}{9}\,;\dfrac{-13}{9}\,;\dfrac{8}{9}\right)$.

b) H là trung điểm của MM', suy ra $x_{M'} + x_M = 2x_H$.

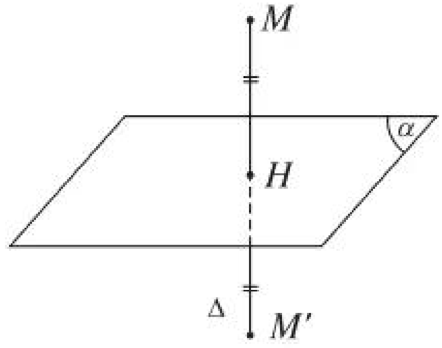
Suy ra $x_{M'} = 2x_H - x_M = \frac{34}{9} - 2 = \frac{16}{9}$.

Tương tự, ta được $y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{-26}{9} + 1 = \frac{-17}{9}$, $z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$.

Vậy $M'\left(\frac{16}{9} ; \frac{-17}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.

3.41. (h.3.27) a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1 ; -1 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 12 = 0$ là

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$



Hình 3.27

Xét điểm $H(1 + 2t ; -1 - t ; 2 + 2t) \in \Delta$.

Ta có $H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + (1 + t) + 2(2 + 2t) + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-19}{9}.$$

Vậy ta được $H\left(\frac{-29}{9} ; \frac{10}{9} ; \frac{-20}{9}\right)$.

b) H là trung điểm của MM', suy ra $x_{M'} = 2x_H - x_M = \frac{-58}{9} - 1 = \frac{-67}{9}$

$$y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{20}{9} + 1 = \frac{29}{9}$$

$$z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{-40}{9} - 2 = \frac{-58}{9}.$$

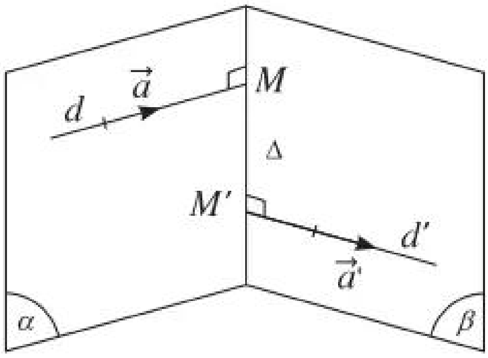
Vậy ta được $M'\left(\frac{-67}{9} ; \frac{29}{9} ; \frac{-58}{9}\right)$.

3.42. (h.3.28) Phương trình tham số của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d và d' lần lượt là $\vec{a} = (-1 ; 2 ; 3)$, $\vec{a}' = (1 ; -2 ; 0)$.

Xét điểm $M(1 - t\ ;\ 2 + 2t\ ;\ 3t)$ trên d và điểm $M'(1 + t'\ ;\ 3 - 2t'\ ;\ 1)$ trên d' ta có $\overrightarrow{MM'} = (t' + t\ ;\ 1 - 2t' - 2t\ ;\ 1 - 3t)$.

MM' là đường vuông góc chung của d và d'



Hình 3.28

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{a'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t' - t + 2 - 4t' - 4t + 3 - 9t = 0 \\ t' + t - 2 + 4t' + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t' + 14t = 5 \\ 5t' + 5t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ t' = \dfrac{1}{15} \end{cases}.$$

Thay giá trị của t và t' vào ta được toạ độ của M và M' là $M\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\ ;\ 1\right)$, $M'\left(\dfrac{16}{15}\ ;\ \dfrac{43}{15};\ 1\right)$.

Do đó $\overrightarrow{MM'} = \left(\dfrac{6}{15}\ ;\ \dfrac{3}{15}\ ;\ 0\right)$.

Suy ra đường vuông góc chung Δ của d và d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + 2t \\ y = \dfrac{8}{3} + t \\ z = 1. \end{cases}$$

3.43. (h.3.29) Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho : C là gốc toạ độ, $\overrightarrow{CD} = a\vec{i}$; $\overrightarrow{CB} = a\vec{j}$; $\overrightarrow{CC'} = a\vec{k}$.

Trong hệ toạ độ vừa chọn ta có

$C(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A'(a\ ;\ a\ ;\ a)$, $D(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $D'(a\ ;\ 0\ ;\ a)$.

$\overrightarrow{CA'} = (a\ ;\ a\ ;\ a)$, $\overrightarrow{DD'} = (0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa $\overrightarrow{CA'}$ và song song với $\overrightarrow{DD'}$. (α) có vectơ pháp tuyến là :

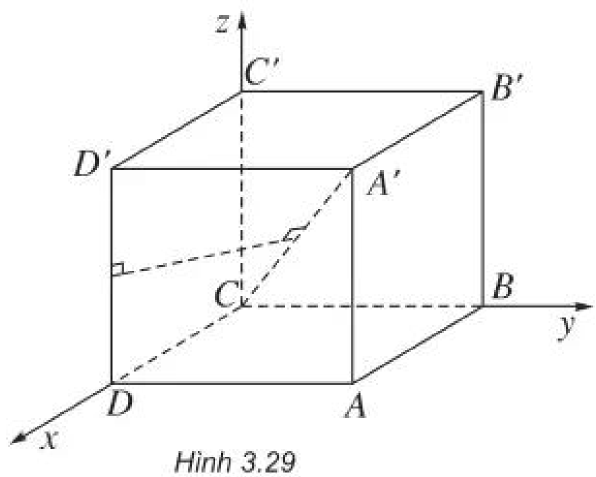
$$\vec{n} = \overrightarrow{CA'} \wedge \overrightarrow{DD'} = (a^2; -a^2; 0)$$

hay $\vec{n}' = (1 ; -1 ; 0)$.

Phương trình tổng quát của (α) là $x - y = 0$.

Ta có : $d(CA', DD') = d(D, (\alpha))$

$$= \frac{|-a|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Hình 3.29

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD' là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3.44. (h.3.30) Phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$

Xét phương trình $2(1 + 2t) + (t) + (-2 - 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm $M\left(2 ; \frac{1}{2} ; -\frac{7}{2}\right)$.

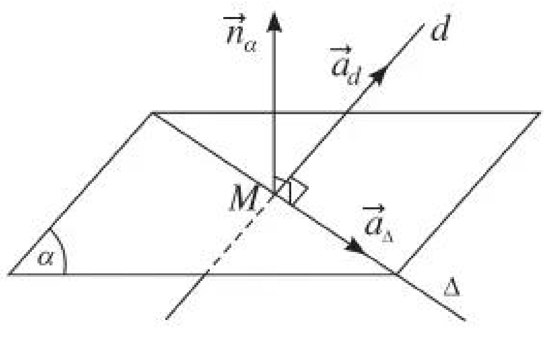
Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và vectơ chỉ phương của đường thẳng d lần lượt là

$\vec{n}_\alpha = (2 ; 1 ; 1)$ và $\vec{a}_d = (2 ; 1 ; -3)$.

Gọi $\vec{a}_\Delta$ là vectơ pháp tuyến của Δ, ta có $\vec{a}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha$ và $\vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_d$.

Suy ra $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{a}_d = (-4 ; 8 ; 0)$

hay $\vec{a}_\Delta = (1 ; -2 ; 0)$.

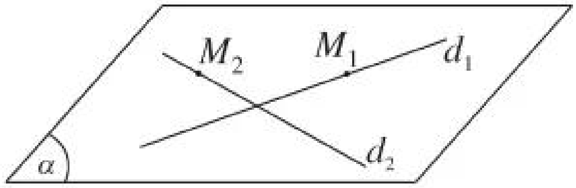


Hình 3.30

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{1}{2} - 2t \\ z = -\frac{7}{2}. \end{cases}$

3.45. (h.3.31) a) Ta có $\vec{a}_{d_1} = (2 ; -3 ; 4)$ và $\vec{a}_{d_2} = (3 ; 2 ; -2)$

$\vec{n} = \vec{a}_{d_1} \wedge \vec{a}_{d_2} = (-2 ; 16 ; 13)$.



Hình 3.31

Lấy điểm $M_1(1 ; -2 ; 5)$ trên d_1
và điểm $M_2(7 ; 2 ; 1)$ trên d_2.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (6 ; 4 ; -4)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_1M_2} = -12 + 64 - 52 = 0.$$

Suy ra d_1 và d_2 cùng nằm trong mặt phẳng (α).

b) Mặt phẳng (α) chứa M_1 và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$, vậy phương trình của (α) là :

$$-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0 \text{ hay } 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$