§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ làm vectơ chỉ phương. Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

2. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì người ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ dưới dạng chính tắc như sau : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

II- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, TRÙNG NHAU, CẮT NHAU HOẶC CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt đi qua hai điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$.

1. Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a'}$, ta có các điều kiện sau :

a) $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

b) $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

c) d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$

d) d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

Nhận xét : $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}' = 0.$

2. Xét hệ phương trình ẩn t và t′ sau

$$\begin{cases} x + ta = x' + t'a' \\ y + ta = y' + t'a' \\ z + ta = z' + t'a' \end{cases} \qquad (1)$$

Khi đó

a) Hai đường thẳng d và d′ cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình (1) có đúng một nghiệm.

b) Hai đường thẳng d và d′ chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và hệ phương trình (1) vô nghiệm.

III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT HOẶC VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, và cho mặt phẳng (α) có phương trình : $Ax + By + Cz + D = 0$. Gọi $\vec{n} = (A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Ta có các điều kiện sau :

1) $d \,//\, (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$

2) $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$

3) d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} \neq 0$

4) $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$ với k là một số thực.

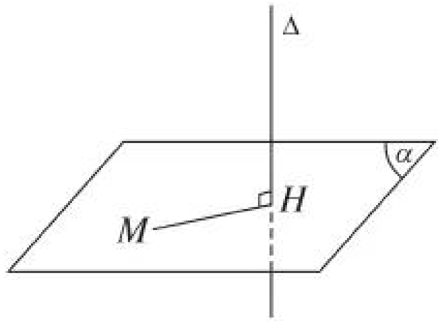
IV- TÍNH KHOẢNG CÁCH

1. Trong không gian $Oxyz$, để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ ;

* Tìm giao điểm H của Δ với (α) ;

* Khoảng cách từ M đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm M và H : $d(M,\ \Delta) = MH$ (h.3.10).

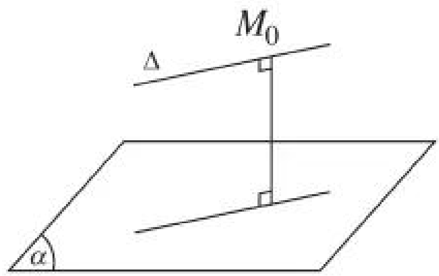


Hình 3.10

2. Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với Δ ta thực hiện các bước :

* Lấy một điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ tuỳ ý trên Δ ;

* Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm M_0 đến (α) : $d(\Delta,(\alpha)) = d(M_0,\ (\alpha))$ (h.3.11).



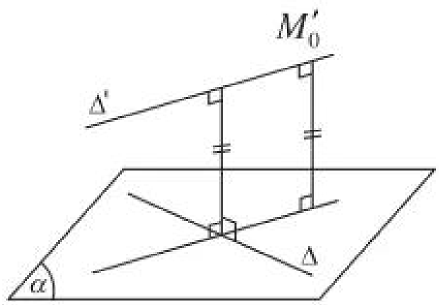
Hình 3.11

3. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' ta thực hiện các bước :

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với đường thẳng Δ' ;

* Lấy một điểm $M'_0(x'_0;\ y'_0;\ z'_0)$ tuỳ ý trên Δ' ;

* Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến (α) : $d(\Delta,\ \Delta') = \mathrm{d}(M'_0,\ (\alpha))$ (h.3.12).



Hình 3.12

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

1. Phương pháp giải

Bước 1 : Xác định một điểm cố định $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ thuộc Δ.

Bước 2 : Xác định một vectơ chỉ phương $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ của Δ.

Bước 3 : Phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ lần lượt có dạng

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

$$\Delta : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \text{ (nếu } a_1, a_2, a_3 \text{ đều khác 0).}$$

2. *Ví dụ*

Ví dụ 1. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(3 ; 5 ; 7)$.

Giải

Δ đi qua hai điểm A và B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2 ; 3 ; 4)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hai mặt phẳng :

$$(P) : x + 2y - z - 1 = 0 \text{ và } (Q) : 2x + y + z - 2 = 0.$$

Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau và viết phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng ấy.

Giải

Ta có $\vec{n}_P = (1 ; 2 ; -1)$; $\vec{n}_Q = (2 ; 1 ; 1)$; $\vec{n}_P \neq k\vec{n}_Q$ do đó (P) và (Q) cắt nhau.

Vì $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = (3 ; -3 ; -3)$ nên có thể chọn $\vec{a}(1 ; -1 ; -1)$ làm vectơ chỉ phương của Δ.

Lấy một điểm, chẳng hạn $A(0 ; 1 ; 1)$ thuộc $(P) \cap (Q)$.

Khi đó phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $d_1 : x - 1 = y - 2 = 13 - z$. Lập phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(0 ; 1 ; -1)$ cắt và vuông góc với d_1.

Giải

Ta cần tìm điểm B thuộc d_1 sao cho $AB \perp d_1$. Khi đó d chính là đường thẳng AB. d_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{a}(1 ; 1 ; -1)$.

Lấy điểm $B(1 + t ; 2 + t ; 13 - t)$ thuộc d_1.

$$\overrightarrow{AB} = (1 + t ; 1 + t ; 14 - t).$$

Ta có : $\overrightarrow{AB} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 1 + t + 1 + t - (14 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$

Vậy $B(5 ; 6 ; 9)$.

$\overrightarrow{AB} = (5 ; 5 ; 10)$.

Suy ra phương trình của đường thẳng d là : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

VẤN ĐỀ 2

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng Δ và Δ' trong không gian

1. Phương pháp giải

Bước 1 : Xác định điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ của Δ. Xác định điểm cố định $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a}'\,(a'_1; a'_2; a'_3)$ của Δ' (h.3.13).

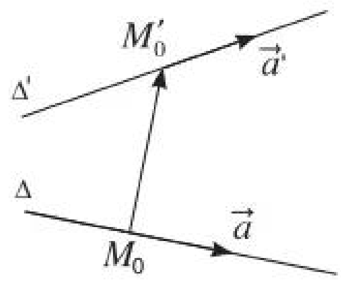
Bước 2 : Tính $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$.

Bước 3 : Dùng các dấu hiệu sau để xét vị trí tương đối giữa Δ và Δ' :

$$\Delta \,//\, \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \text{ cắt } \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \end{cases}$$



Hình 3.13

Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ lần lượt với các đường thẳng sau

$$d_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2} \ ;$$

$$d_2 : \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3} \ ;$$

$$d_3 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5} \ ;$$

$$d_4 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Giải

Ta có đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; -1 ; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; 3 ; 1)$.

a) d_1 đi qua điểm $M_1(3 ; 2 ; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (4 ; 6 ; 2)$.

Ta có $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_1 = (0 ; 0 ; 0) = \vec{0}$.

M_1 thuộc Δ $\left(\text{vì } \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2+1}{3} = \dfrac{6-5}{1}\right)$. Vậy $\Delta \equiv d_1$.

b) d_2 đi qua $M_2(4 ; 1 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (6 ; 9 ; 3)$.

Ta có $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_2 = (0 ; 0 ; 0) = \vec{0}$.

M_2 không thuộc $\Delta\left(\text{vì } \dfrac{4-1}{2} \neq \dfrac{1+1}{3}\right)$. Vậy $\Delta \,//\, d_2$.

c) d_3 đi qua điểm $M_3(3\,;\,2\,;\,6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_3 = (4\,;\,3\,;\,5)$.

Ta có : $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_3 = (12\,;\,-6\,;\,-6) \neq \vec{0}$.

$\overrightarrow{M_0M_3} = (2\,;\,3\,;\,1)$,

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_3} = 24 - 18 - 6 = 0$.

Vậy Δ cắt d_3.

d) d_4 đi qua $M_4(1\,;\,-2\,;\,-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_4 = (3\,;\,2\,;\,2)$.

Ta có : $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_4 = (4\,;\,-1\,;\,-5)$.

$\overrightarrow{M_0M_4} = (0\,;\,-1\,;\,-6)$,

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_4} = 0 + 1 + 30 \neq 0$.

Vậy Δ và d_4 là hai đường thẳng chéo nhau.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và $d' : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

a) Hãy xét vị trí tương đối giữa d và d'.

b) Tìm giao điểm nếu có của d và d'.

Giải

a) Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 3 - t = 1 + 2t' & (1) \\ 2t = -1 + t' & (2) \\ -1 + t = -t' & (3) \end{cases}$

Giải hệ (1) và (2) ta được : $\begin{cases} t + 2t' = 2 \\ 2t - t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1. \end{cases}$

Các giá trị của t, t' này thoả mãn (3). Do đó hệ phương trình (I) có một nghiệm. Vậy d cắt d'.

b) Thay $t = 0$ vào phương trình tham số của d' ta được giao điểm là $M(3 ; 0 ; -1)$.

Ví dụ 3. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$$d : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t'. \end{cases}$$

Giải

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây đối với t và t' có nghiệm :

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t'. & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) ta suy ra $\begin{cases} t = 2 \\ t' = 0. \end{cases}$

Thay các giá trị trên của t và t' vào phương trình (1) ta được :

$$1 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $a = 0$.

Vấn đề 3

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1 ; a_2 ; a_3)$ và cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Gọi $\vec{n}(A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta có các cách sau :

Cách 1. Xét tích vô hướng $\vec{n}.\vec{a}$ và thay toạ độ của điểm M_0 vào phương trình của (α) để kiểm tra, ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\begin{cases} \vec{n}.\vec{a} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d$ song song với (α)

Trường hợp 2. $\begin{cases} \vec{n}.\vec{a} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d$ nằm trong (α)

Trường hợp 3. $\vec{n}.\vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow d$ cắt (α)

Trường hợp 4. $\vec{n} = k\vec{a} \Leftrightarrow d$ vuông góc với (α).

Cách 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng $d : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$

– Thay x, y, z ở phương trình tham số trên vào phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ ta được

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \text{ hay } mt + n = 0. \quad (1)$$

Xét số nghiệm t của phương trình (1) ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1 : (1) vô nghiệm

$\Leftrightarrow d$ song song với (α).

Trường hợp 2 : (1) có một nghiệm $t = t_0$

$\Leftrightarrow d$ cắt (α) tại điểm $M_0(x_0 + t_0 a_1; y_0 + t_0 a_2; z_0 + t_0 a_3)$

Trường hợp 3 : (1) có vô số nghiệm

$\Leftrightarrow d$ nằm trong (α)

Trường hợp 4 : $(A ; B ; C) = k(a_1; a_2; a_3)$

$\Leftrightarrow d$ vuông góc với (α).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

lần lượt với các mặt phẳng sau $(\alpha_1) : x + y + z + 2 = 0$;

$(\alpha_2) : 4x + 8y + 2z - 7 = 0$;

$(\alpha_3) : x - y + 2z + 5 = 0$;

$(\alpha_4) : 2x - 2y + 4z - 10 = 0$.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; 4 ; 1)$.

Các mặt phẳng (α_1), (α_2), (α_3), (α_4) có vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1 ; 1 ; 1),\ \vec{n}_2 = (4 ; 8 ; 2),\ \vec{n}_3 = (1 ; -1 ; 2),\ \vec{n}_4 = (2 ; -2 ; 4).$$

Ta có :

a) $\vec{n}_1.\vec{a} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$. Vậy đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α_1).

b) $\vec{n}_2 = 2\vec{a}$. Vậy đường thẳng Δ vuông góc với (α_2).

c) $\begin{cases} \vec{n}_3.\vec{a} = 2 - 4 + 2 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha_3) \text{ (vì } 1 - (2) + 2.(3) + 5 \neq 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng Δ song song với (α_3).

d) $\begin{cases} \vec{n}_4.\vec{a} = 4 - 8 + 4 = 0 \\ M_0 \in (\alpha_4) \text{ (vì } 2.(1) - 2.(2) + 4.(3) - 10 = 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α_4).

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$

và mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y + z - 1 = 0$.

Chứng minh rằng d cắt (α) và tìm toạ độ giao điểm.

Giải

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$

Thay x, y, z ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được :

$$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$.

Phương trình (1) có một nghiệm $t_0 = \dfrac{2}{3}$, vậy d cắt (α) tại điểm

$$M_0\left(1 + \frac{4}{3} ; -1 + \frac{2}{3} ; -\frac{2}{3}\right) \text{ hay } M_0\left(\frac{7}{3} ; -\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3}\right).$$

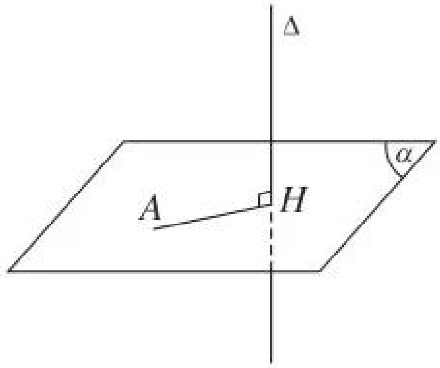
VẤN ĐỀ 4

Tính khoảng cách

1. Phương pháp giải

Loại 1. Khoảng cách từ điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ đến đường thẳng Δ :

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$



Hình 3.14

Cách 1

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với Δ

* Tìm giao điểm H của Δ và (α)

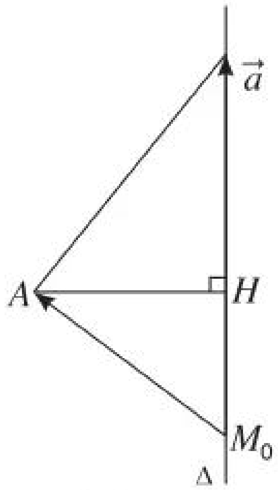
* Tính $d(A, \Delta) = AH$ (h.3.14).

Cách 2

* Lấy điểm $M_0 \in \Delta$

* Tính $\vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a}$

* $d(A, \Delta) = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|}$ (h.3.15).



Hình 3.15

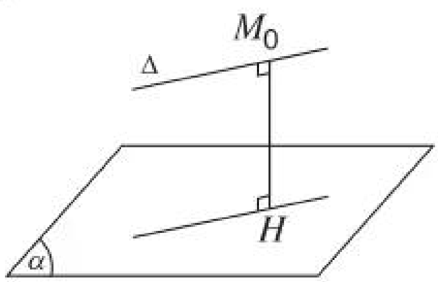
Loại 2. Khoảng cách giữa đường thẳng Δ : $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ và mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ song song với Δ

Cách giải

* Lấy điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ

* Tính $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ (h.3.16).}$$



Hình 3.16

Loại 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$$\Delta : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

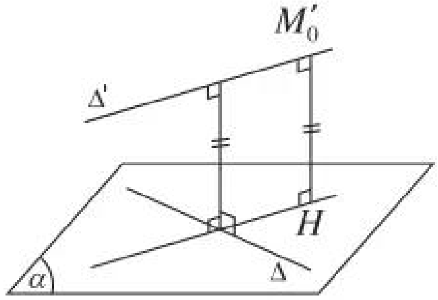
$$\Delta' : \frac{x - x_0'}{a_1'} = \frac{y - y_0'}{a_2'} = \frac{z - z_0'}{a_3'}$$

Cách 1

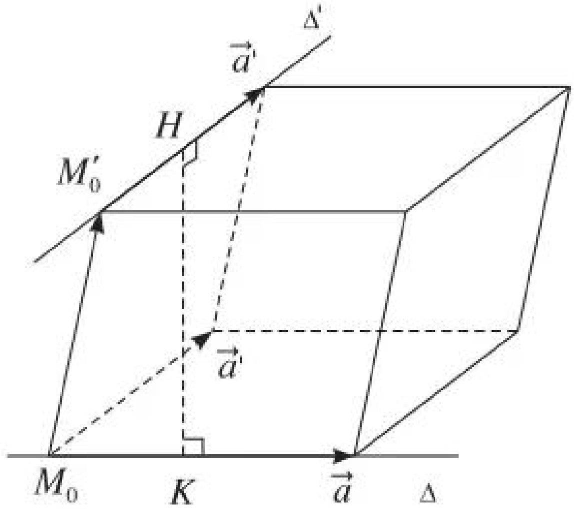
* Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' ta được (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

* Lấy điểm $M_0'(x_0' \,;\, y_0' \,;\, z_0')$ thuộc Δ'.

* Tính $d(\Delta,\ \Delta') = d(M_0', (\alpha)) = \dfrac{\left|Ax_0' + By_0' + Cz_0' + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (h.3.17).



Hình 3.17



Hình 3.18

Cách 2

* Xác định điểm $M_0 \in \Delta$ và điểm $M_0' \in \Delta'$.

* Xác định hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ là hai vectơ chỉ phương của Δ và Δ'.

* Tính $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$.

* Tính $V = \left|\overrightarrow{M_0M_0'}.\vec{n}\right|$.

* Tính $d(\Delta, \Delta') = HK = \dfrac{V}{|\vec{n}|}$ (h.3.18).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ điểm $A(1 ; 2 ; 1)$ đến đường thẳng Δ :

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}.$$

Giải

Cách 1

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với Δ.

Ta có $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = (1 ; 2 ; -2)$.

Vậy phương trình của (α) là $1(x-1)+2(y-2)-2(z-1)=0$

hay $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=-1-2t, \end{cases}$

thay x, y, z ở trên vào phương trình (α) ta được :

$(-2+t)+2(1+2t)-2(-1-2t)-3=0 \Leftrightarrow 9t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{9}$.

Vậy (α) cắt Δ tại điểm $H\left(-2+\frac{1}{9} ; 1+\frac{2}{9} ; -1-\frac{2}{9}\right)$ hay $H\left(-\frac{17}{9}; \frac{11}{9}; \frac{-11}{9}\right)$.

Ta có $d(A, \Delta) = AH = \sqrt{\left(-\frac{17}{9}-1\right)^2+\left(\frac{11}{9}-2\right)^2+\left(-\frac{11}{9}-1\right)^2} = \frac{15\sqrt{5}}{9} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2

* Δ đi qua $M_0(-2 ; 1 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1 ; 2 ; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0A} = (3 ; 1 ; 2)$.

* $\vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a} = (-6 ; 8 ; 5)$.

* Vậy $d(A, \Delta) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{36+64+25}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng (α) : $3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng Δ :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}.$$

a) Hãy chứng tỏ Δ song song với (α).

b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α).

Giải

a) Ta có $\vec{n}_{\alpha} = (3 ; -2 ; -1)$

$\vec{a}_{\Delta} = (2 ; 1 ; 4)$,

Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 7 ; 3)$.

Ta có $\vec{n}_{\alpha} . \vec{a}_{\Delta} = 6 - 2 - 4 = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$. Vậy Δ song song với (α).

b) $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|3.(1) - 2.(7) - (3) + 5|}{\sqrt{9+4+1}} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$.

Ví dụ 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Giải

Cách 1

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ'. Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là : $\vec{a} = (2 ; -1 ; 0)$ và $\vec{a}' = (-1 ; 1 ; 1)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1 ; -2 ; 1)$.

Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm $M_0(1 ; -1 ; 1)$. Phương trình (α) có dạng $-(x - 1) - 2(y + 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$.

Δ' đi qua điểm $M'_0 (2 ; -2 ; 3)$.

Vậy $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \dfrac{|2 - 4 - 3 + 2|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2

Ta có $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1 ; -2 ; 1)$

$\overrightarrow{M_0M'_0} = (1 ; -1 ; 2)$,

$V = \left|\overrightarrow{M_0M'_0}.\vec{n}\right| = |-1 + 2 + 2| = 3$.

Vậy $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{V}{|\vec{n}|} = \dfrac{3}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.31. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3\ ;\ 3\ ;\ 1)$;

b) Δ đi qua điểm $B(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) :

$$2x - y + z + 9 = 0\ ;$$

c) Δ đi qua hai điểm $C(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ và $D(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

3.32. Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) : $y + 2z = 0$ và cắt hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4. \end{cases}$

3.33. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau :

a) $d : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ và $d' : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{2}$;

b) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \\ z = 10 - 2t' \end{cases}$;

c) $d : \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5t'. \end{cases}$

3.34. Tìm a để hai đường thẳng sau đây song song

$$d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

3.35. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $(\alpha) : x + 2y + z - 3 = 0$;

b) $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(\alpha): x + z + 5 = 0$;

c) $d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$.

3.36. Tính khoảng cách từ điểm $A(1 ; 0 ; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

3.37. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng Δ song song với (α).

b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α).

3.38. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng Δ và Δ' trong các trường hợp sau :

a) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases}$;

b) $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t'. \end{cases}$;

3.39. Cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$,

$$\Delta': \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{4}.$$

a) Xét vị trí tương đối giữa Δ và Δ' ;

b) Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'.

3.40. Cho điểm $M(2 ; -1 ; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ ;

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng Δ.

3.41. Cho điểm $M(1\ ;-1\ ;2)$ và mặt phẳng (α) : $2x-y+2z+12=0$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) ;

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

3.42. Cho hai đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-2t' \\ z=1. \end{cases}$$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

3.43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Bằng phương pháp toạ độ hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD'.

3.44. Cho mặt phẳng (α) : $2x+y+z-1=0$

và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Gọi M là giao điểm của d và (α), hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với d và nằm trong (α).

3.45. Cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ và $d_2: \begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=1-2t. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình của (α).