II- ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

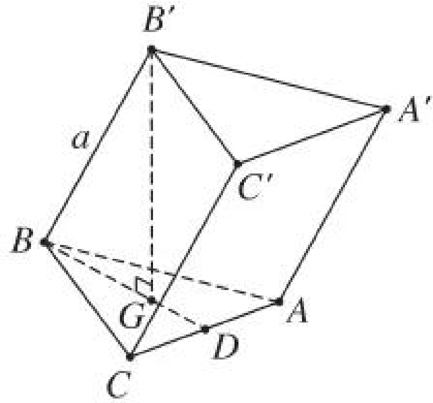
1.28. Không phải là hình đa diện, vì trong hình đó có cạnh (chẳng hạn AB) không phải là cạnh chung của đúng hai đa giác.

1.29. Lấy một đỉnh B tuỳ ý của hình đa diện (H). Gọi M_1 là một mặt của hình đa diện (H) chứa B. Gọi A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của M_1. Khi đó AB, BC là hai cạnh của (H). Gọi M_2 là mặt khác với M_1 và có chung cạnh AB với M_1. Khi đó M_2 còn có ít nhất một đỉnh D sao cho A, B, D là ba đỉnh khác nhau liên tiếp của M_2. Nếu $D \equiv C$ thì M_1 và M_2 có hai cạnh chung AB và BC, điều này vô lí. Vậy D phải khác C. Do đó qua đỉnh B có ít nhất ba cạnh BA, BC và BD.

1.30. (h.1.26) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó $\widehat{B'BG} = 60^o$,

$B'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BG = \dfrac{a}{2}$.

Gọi D là trung điểm của AC, khi đó $BD = \dfrac{3a}{4}$.



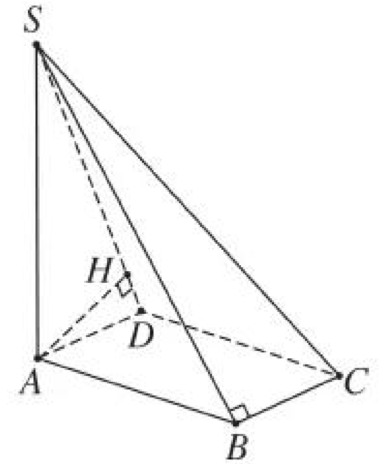
Hình 1.26

Ta có $BC^2 + CD^2 = BD^2$, do đó $BC^2 + \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{5BC^2}{4} = \dfrac{9a^2}{16}$.

Suy ra $BC^2 = \dfrac{9}{20}a^2, S_{ABC} = \dfrac{BC^2}{2} = \dfrac{9}{40}a^2$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{9a^2}{40} = \frac{9\sqrt{3}}{80}a^3.$$

1.31. Chia đáy của lăng trụ đã cho thành năm tam giác cân có chung đỉnh O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Khi đó diện tích đáy bằng $\dfrac{5}{2}r^2 \sin 72^o$. Do đó thể tích lăng trụ đó bằng $\dfrac{5}{2}hr^2 \sin 72^o$.



Hình 1.27

1.32. (h.1.27) Vì các mặt (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow$ góc$\left((SBC),(ABCD)\right) = \widehat{SBA} = 60^o$.

Do đó : $SA = 2a\tan 60^o = 2a\sqrt{3}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}2a\sqrt{3}.2a.a = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3.$$

Vì CD // AB nên d(AB, CD) = d(AB, (SCD)). Hạ $AH \perp SD$, để ý rằng $CD \perp (SAD)$, suy ra $AH \perp (SCD)$. Do đó d(AB, SC) = AH.

Ta có :

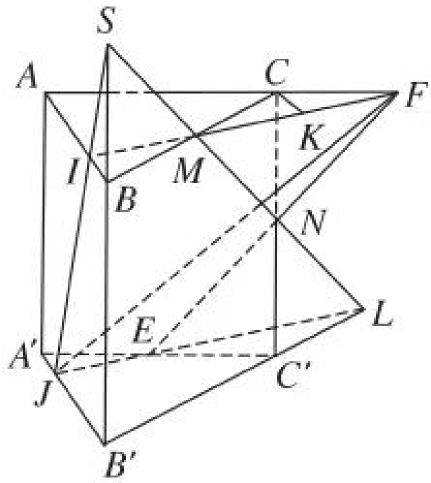
$$AH.SD = SA.AD \Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{3}.a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}}a.$$

1.33. (h.1.28) a) Gọi S là giao của hai đường thẳng MN và BB'. Khi đó S, I, J là điểm chung của cả hai mặt phẳng (MNE) và ($ABB'A'$) nên chúng thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng BB', MN và IJ đồng quy. Đa diện $IBM.JB'L$ có hai mặt (IBM) và ($JB'L$) song song, các cạnh BB', MN và IJ đồng quy nên nó là một hình chóp cụt. Tương tự, đa diện $A'EJ.AFI$ cũng là một hình chóp cụt.

b) Hai tam giác NCF và $NC'E$ có $\widehat{C} = \widehat{C'} = 90^o$, $NC = NC'$, $\widehat{CNF} = \widehat{C'NE}$ nên chúng bằng nhau.

Do đó $CF = C'E = \dfrac{a}{2}$.

Tương tự, $C'L = CM = \dfrac{a}{2}$. Từ đó suy ra tam giác MCF cân ở C. Ngoài ra ta còn có $\widehat{CMF} = \widehat{BMI} = 30^{o}$ và $\widehat{IBM} = 60^{o}$ nên $\widehat{MIB} = 90^{o}$, $IB = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{a}{4}$ và $IM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BM = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.



Hình 1.28

Vì $FI \perp AB$, $FI \perp AA'$ nên $FI \perp (AIJA')$. Ta có diện tích hình thang vuông $AA'JI$ bằng $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3a}{4}+\dfrac{a}{4}\right)b = \dfrac{ab}{2}$.

Gọi K là trung điểm của MF thì do tam giác MCF cân ở C nên $CK \perp MF$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông CMK và BMI bằng nhau.

Do đó $MF = MK = MI$. Từ đó suy ra $FI = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Vậy $V_{F.AIJA'} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{ab}{2}\right)\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2b$.

c) Lí luận như ở câu b) ta có $C'L = CM = \dfrac{a}{2}$, $LJ \perp A'B'$ và $LJ = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Giả sử mặt phẳng (MNE) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện chứa đỉnh B'.

Ta thấy $V_{(H')} = V_{IBM.JB'L} - V_{N.EC'L}$, $V_{(H)} = V_{JA'E.IAF} - V_{N.FCM}$.

Vì $\Delta IBM = \Delta JA'E$, $\Delta JB'L = \Delta IAF$, $BB' = A'A$ nên $V_{IBM.JB'L} = V_{JA'E.IAF}$.

Ngoài ra hai hình chóp $N.EC'L$ và $N.FCM$ có đường cao bằng nhau và có đáy là những tam giác bằng nhau nên chúng có thể tích bằng nhau.

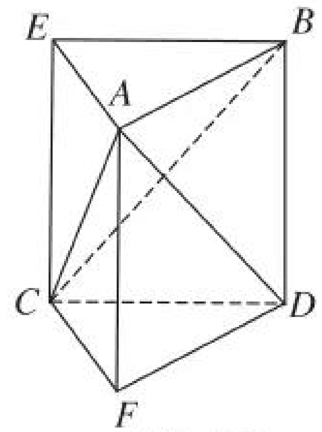
Từ đó suy ra $V_{(H)} = V_{(H')}$.

1.34. (h.1.29) Dựng BE song song và bằng DC, DF song song và bằng BA. Khi đó $ABE.FDC$ là một lăng trụ đứng.

Ta có : $S_{ABE} = \frac{1}{2}ab.\sin 60^{\circ} = ab\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$$V_{C.ABE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ab.h = \frac{\sqrt{3}}{12}abh.$$

Từ đó suy ra $V_{A.BCD} = V_{A.BCE} = \frac{\sqrt{3}}{12}abh$.

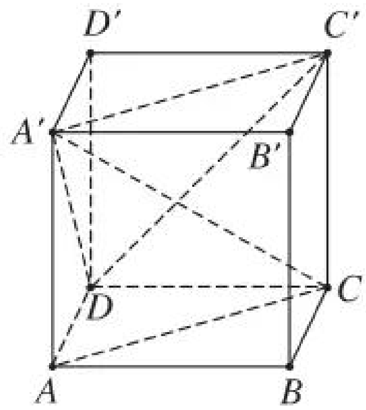


Hình 1.29

1.35. Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a thì cạnh của hình bát diện đều (H) là $\frac{a}{2}$. Khi đó

$$V_{ABCD} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12},\ V_{(H)} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\sqrt{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

Từ đó suy ra $\frac{V_{(H)}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$.



Hình 1.30

1.36. a) (h.1.30) Gọi $d(AC, DC') = h$.

Ta có $C'A' \parallel CA$, do đó :

$d(AC, DC') = d(AC, (A'C'D))$

$= d(C, (A'C'D)) = h$.

Ta có : $V_{A'.CDC'} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a = \frac{a^3}{6}$.

Để ý rằng tam giác $A'C'D$ là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

Do đó :

$$S_{A'C'D} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\ ;\ V_{C.A'C'D} = \frac{1}{3}S_{A'C'D}.h = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}h = V_{A'.CDC'} = \frac{a^3}{6}.$$

Từ đó suy ra : $h = \dfrac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

b) (h.1.31) Từ A kẻ đường thẳng song song với MC', cắt DD' tại N và $A'D'$ kéo dài tại J.

Đặt $h_1 = d(MC', AB') = d(M, (AB'N))$.

Ta có : $V_{M.AB'N} = V_{N.AB'M} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{4}a = \dfrac{a^3}{12}$.

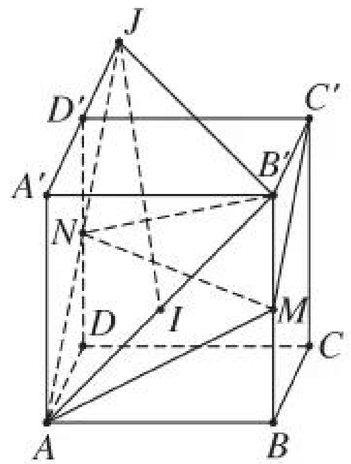
Để ý rằng N là trung điểm của DD', $A'J = 2A'D'$ và $JA = JB'$.

Gọi I là trung điểm của AB′, khi đó $JI \perp AB'$.

Ta có : $AJ = \sqrt{AA'^2 + A'J^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$; $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra : $IJ = \sqrt{5a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$;

$$S_{JAB'} = \frac{1}{2}\frac{3a}{\sqrt{2}}a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}.$$



Hình 1.31

Do đó : $S_{AB'N} = \dfrac{1}{2}S_{JAB'} = \dfrac{3a^2}{4}$;

$$V_{M.AB'N} = \frac{1}{3}\frac{3a^2}{4}h_1 = \frac{a^2h_1}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

Suy ra : $h_1 = \dfrac{a}{3}$.

Chú ý. Có thể tính $S_{AB'N}$ bằng cách khác.

Để ý rằng :

$$NB' = \sqrt{ND'^2 + B'D'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3a}{2},\ AN = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ AB' = a\sqrt{2}.$$

Gọi $\alpha = \widehat{NAB'}$. Ta có :

$$NB'^2 = AN^2 + AB'^2 - 2AN.AB'.\cos\alpha$$

hay $\dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} + 2a^2 - 2\dfrac{a\sqrt{5}}{2}a\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Do đó : $S_{AB'N} = \dfrac{1}{2}AB'.AN.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3a^2}{4}$.

1.37. (h.1.32) Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện, V là thể tích tứ diện. Ta có

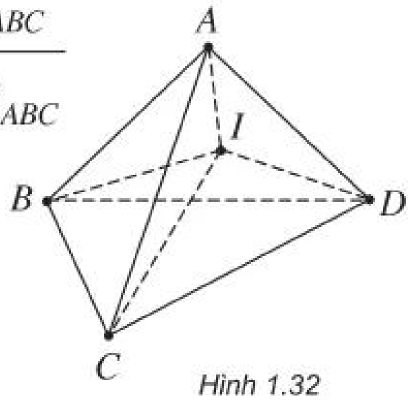
$$V = V_{IBCD} + V_{ICDA} + V_{IDAB} + V_{IABC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_{IBCD}}{V} + \frac{V_{ICDA}}{V} + \frac{V_{IDAB}}{V} + \frac{V_{IABC}}{V}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} r S_{BCD}}{\frac{1}{3} h_A S_{BCD}} + \frac{\frac{1}{3} r S_{CDA}}{\frac{1}{3} h_B S_{CDA}} + \frac{\frac{1}{3} r S_{DAB}}{\frac{1}{3} h_C S_{DAB}} + \frac{\frac{1}{3} r S_{ABC}}{\frac{1}{3} h_D S_{ABC}}$$

$$= r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$



Hình 1.32