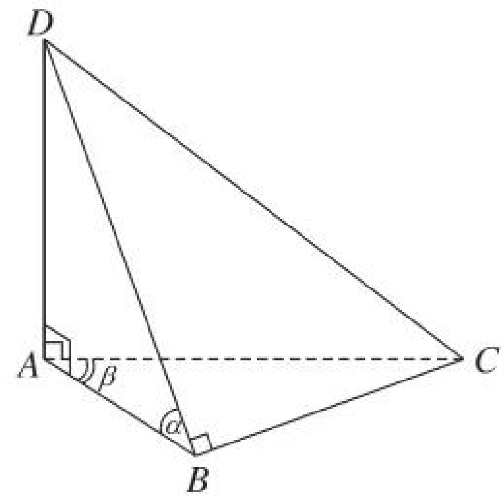
ÔN TẬP CHƯƠNG II

II- ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

2.24. (h.2.46) Tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 90^o$ nên $\widehat{ABD} = \alpha$ là một góc nhọn. Khi quay các cạnh của tứ diện đó xung quanh cạnh AB thì cạnh BD tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh B có trục là AB, cạnh AD vuông góc với AB tạo thành đáy của hình nón đó.

Mặt khác theo giả thiết ta có $BD \perp BC$ nên $AB \perp BC$. Ta có $\widehat{BAC} = \beta$ là một góc nhọn. Do đó khi quay các cạnh của tứ diện xung quanh cạnh AB thì cạnh AC tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh A có trục là AB, còn cạnh BC tạo thành đáy của hình nón.



Hình 2.46

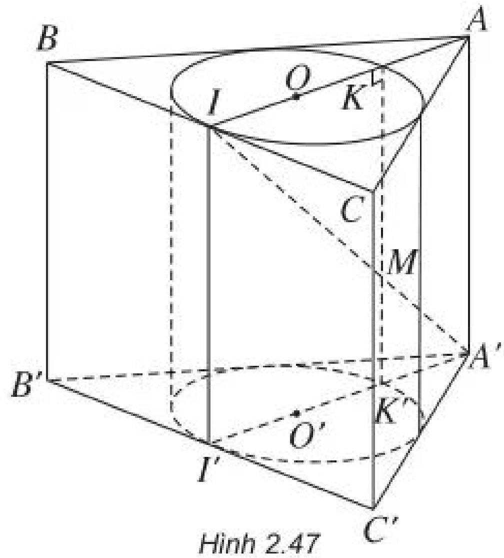
Như vậy khi quay tất cả các cạnh của tứ diện xung quanh trục AB thì các cạnh BD và AC tạo thành hai hình nón.

2.25. (h.2.47) a) Hình trụ nội tiếp trong lăng trụ tam giác đều có đường tròn đáy tiếp xúc tại trung điểm các cạnh của tam giác đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, r là bán kính đáy của hình trụ nội tiếp trong lăng trụ, ta có :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot \text{ Do đó } r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp lăng trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot h = \frac{\sqrt{3}\pi ah}{3}\cdot$$



Hình 2.47

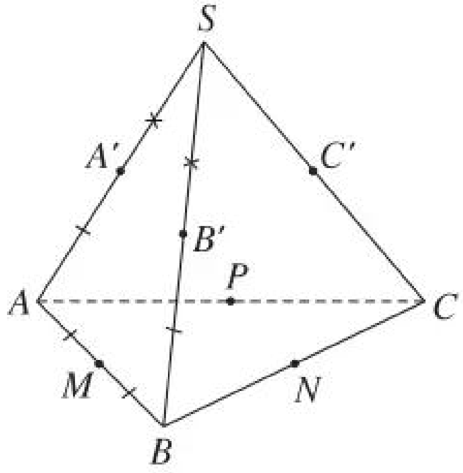
b) Ta có mặt phẳng $(AA'I)$ là mặt phẳng qua trục hình trụ. Mặt phẳng này cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $IKK'I'$. Đoạn $A'I$ cắt KK' tại M nên cắt hình trụ theo đoạn IM.

Ta có : $\dfrac{KM}{AA'} = \dfrac{IK}{IA} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow KM = \dfrac{2}{3}h$.

Xét tam giác vuông IKM ta có : $IM^2 = IK^2 + KM^2 = \dfrac{3a^2}{9} + \dfrac{4h^2}{9} = \dfrac{3a^2 + 4h^2}{9}$.

Vậy $IM = \dfrac{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{3}$.

2.26. (h.2.48) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và A', B', C' là các điểm tiếp xúc của các cạnh bên SA, SB, SC với mặt cầu. Ta có AA' và AM là hai tiếp tuyến nên $AM = AA'$. Vì M là trung điểm của AB nên $AM = MB$.



Hình 2.48

Mặt khác $BM = BB'$, ta suy ra $AA' = BB'$.

Vì $SA' = SB'$ nên $SA' + A'A = SB' + B'B$ hay $SA = SB$.

Tương tự, ta chứng minh được $SB = SC$.

Do đó $SA = SB = SC$.

Mặt khác $AB = 2BM = 2BN = BC = 2CN = 2CP = CA$. Vậy $AB = BC = CA$ và ABC là một tam giác đều. Do đó hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và ABC là một tam giác đều nên là một hình chóp đều. Ta có đường cao kẻ từ S có chân H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

2.27. (h.2.49) a) Tam giác vuông ABC có $BC = 2a$ và $AC = a$ nên ta suy ra $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Khi quay xung quanh trục AB cạnh BC tạo nên mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh bằng 60° và có đường tròn đáy có bán kính $AC = a$. Khi quay xung quanh trục AB nửa đường tròn đường kính AB tạo nên mặt cầu có tâm là trung điểm I của đoạn AB và bán kính $r = \dfrac{AB}{2}$.

b) Khi quay xung quanh trục AB, giao điểm M của nửa đường tròn đường kính AB và cạnh BC sẽ tạo nên giao tuyến của mặt nón và mặt cầu.

Vẽ $MH \perp AB$

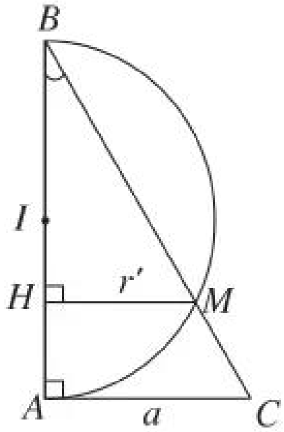
Ta có : $\dfrac{MH}{MB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác ta có $CA^2 = CM.CB$ nên ta có $CM = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}\cdot$

Do đó $BM = CB - CM = 2a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}a$ và $MH = \dfrac{3}{4}a$.

Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính $r' = \dfrac{3}{4}a$.

c) Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón và S_2 là diện tích mặt cầu.

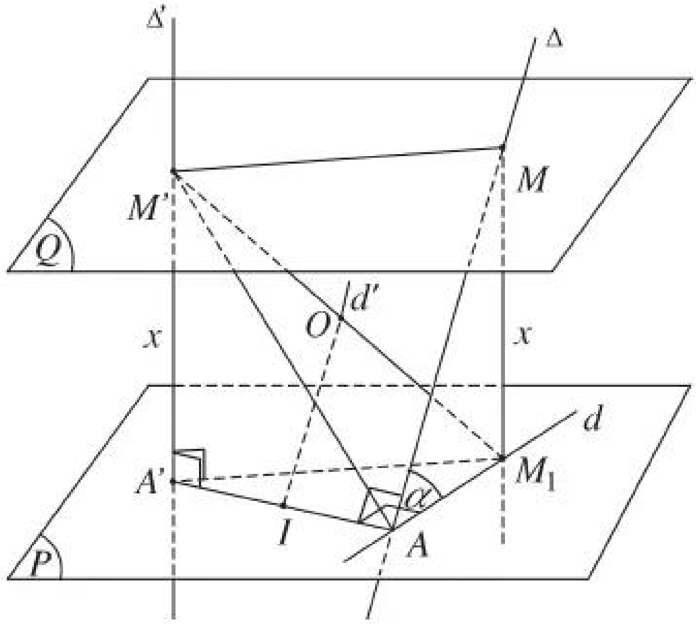


Hình 2.49

Ta có : $S_1 = \pi rl + \pi r^2 = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$.

$$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi (IA)^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2. \text{ Vậy } S_1 = S_2.$$

2.28. (h.2.50) a) Vì mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với Δ' nên AA' thuộc (P). Vì M thuộc Δ mà d là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) nên M_1 thuộc d. Vì $MA \perp AA'$ nên $M_1A \perp AA'$.



Hình 2.50

Mặt khác $M_1A \perp M'A'$ nên ta suy ra $M_1A \perp (AA'M')$. Do đó $M_1A \perp M'A$ và điểm A thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$.

Ta có $M'A' \perp (P)$ nên $M'A' \perp A'M_1$, ta suy ra điểm A' cũng thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$.

Ta có $(Q) // (P)$ nên ta suy ra $MM_1 \perp (Q)$ mà MM' thuộc (Q), do đó $M_1M \perp MM'$.

Như vậy 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) có đường kính $M'M_1$. Tâm O của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn $M'M_1$.

Ta có $M'M_1^2 = M'A'^2 + A'M_1^2 = M'A'^2 + A'A^2 + AM_1^2 = x^2 + a^2 + x^2\cot^2\alpha$

vì $MM_1 = x$ và $\cot\alpha = \dfrac{AM_1}{M_1M} = \dfrac{AM_1}{x}$.

Bán kính r của mặt cầu (S) bằng $\dfrac{M'M_1}{2}$ nên $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2(1+\cot^2\alpha)}$.

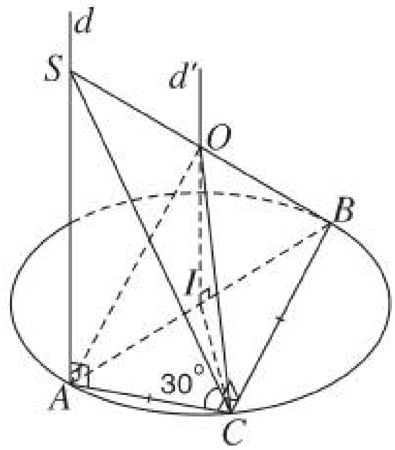
b) Hình tứ giác $A'M'MM_1$ là hình chữ nhật nên tâm O cũng là trung điểm của $A'M$. Do đó khi x thay đổi thì mặt phẳng (Q) thay đổi và điểm O luôn luôn thuộc đường thẳng d' đi qua trung điểm I của đoạn AA' và song song với đường thẳng Δ. Vì mặt cầu tâm O luôn luôn đi qua hai điểm cố định A, A' nên nó có tâm O di động trên đường thẳng d'. Do đó mặt cầu tâm O luôn luôn chứa đường tròn tâm I cố định có đường kính AA' cố định và nằm trong mặt phẳng cố định vuông góc với đường thẳng d'.

2.29. (h.2.51) a) Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên ta có $IA = IB = IC$. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ phải nằm trên đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Ta suy ra $d' // d$. Do đó d' cắt SB tại trung điểm O của đoạn SB. Ta có $OB = OS = OA = OC$ và như vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

b) Trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° thì góc của hai mặt phẳng đó chính là góc $\widehat{SCA}$. Thực vậy vì $SA \perp (ABC)$ mà $AC \perp CB$ nên ta có $SC \perp CB$. Do đó $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Vì $AB = 2a$ nên ta có $AC = a\sqrt{2}$

ta suy ra $SA = AC.\tan 30^\circ = a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Hình 2.51

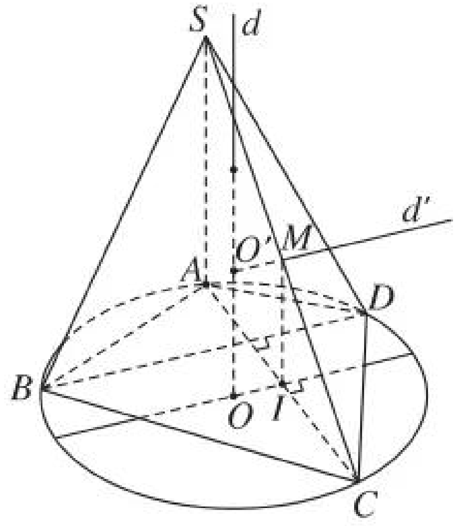
Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện khi $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Ta có $r = \dfrac{SB}{2} = OA = OB = OC = OS$, trong đó $SB^2 = SA^2 + AB^2$.

Vậy $SB^2 = \frac{6a^2}{9} + 4a^2 = \frac{42a^2}{9}\cdot$ Do đó $SB = \frac{a\sqrt{42}}{3}\cdot$

Ta suy ra $r = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}\cdot$

2.30. (h.2.52) a) Trong mặt phẳng chứa đường tròn tâm O ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ ta kẻ đường kính qua O vuông góc với dây cung AC tại I. Ta có $IA = IC$ và $OI \mathbin{//} BD$. Gọi O' là tâm mặt cầu đi qua 5 đỉnh của hình chóp. Khi đó điểm O' phải nằm trên trục d của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Ta có $d \perp (ABCD)$ tại O. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Ta có $MI \mathbin{//} SA$ nên $MI \perp (ABCD)$ tại I. Từ M kẻ đường thẳng $d' \mathbin{//} OI$ cắt d tại O'. Vì $d' \perp (SAC)$ tại M nên ta có $O'C = O'S$ và $O'C$ là bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Hình 2.52

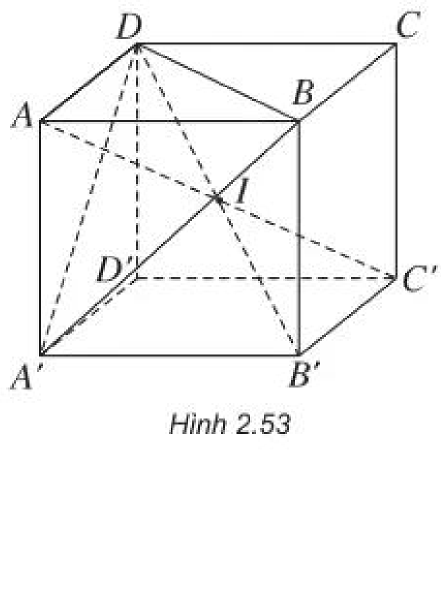
Ta có $r = O'C = \sqrt{OO'^2 + OC^2} = \sqrt{MI^2 + r'^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4r'^2}}{2}\cdot$

Vì SA không đổi nên ta có V_{SABCD} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABCD} lớn nhất. Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$ trong đó AC và BD là hai dây cung vuông góc với nhau. Vậy $AC.BD$ lớn nhất khi và chỉ khi $AC = BD = 2r'$, nghĩa là tứ giác $ABCD$ là một hình vuông.

2.31. (h.2.53) a) Hình trụ có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó ta có : $S_{xq} = 2\pi rh = \pi a^2\sqrt{2}$.

b) Gọi I là tâm của hình lập phương. Tất cả các đỉnh của hình lập phương đều có khoảng cách đến I bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên chúng nằm trên mặt cầu tâm I bán kính $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$



Hình 2.53

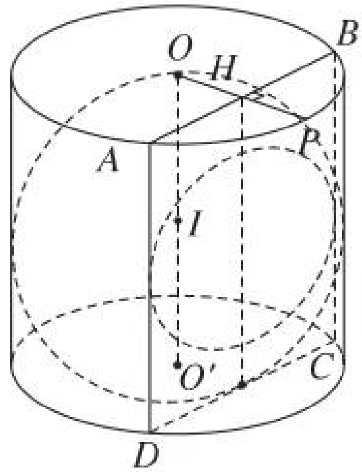
Ta có diện tích mặt cầu đó là $S = 4\pi r^2 = 3\pi a^2$.

c) Đường tròn đáy của hình nón tròn xoay đỉnh A tạo nên bởi cạnh AB là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $A'BD$, tam giác này có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và có đường cao bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$

Do đó đường tròn đáy hình nón có bán kính $r' = \frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot$ Vậy hình nón tròn xoay này có đường sinh $l = a$ và có diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi r'l = \pi\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot a = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{3}\cdot$

2.32. (h.2.54) a) Vì các mặt đáy của hình trụ vuông góc với trục OO' tại O và O' nên chúng tiếp xúc với mặt cầu đường kính OO'.

Gọi I là trung điểm của đoạn OO'. Ta có I là tâm của mặt cầu. Kẻ IM vuông góc với một đường sinh nào đó (M nằm trên đường sinh) ta đều có $IM = r$ là bán kính của mặt trụ, đồng thời điểm M cũng thuộc mặt cầu. Vậy mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt trụ.



Hình 2.54

b) Trên mặt đáy tâm O ta gọi H là trung điểm của bán kính OP. Qua H kẻ dây cung $AB \perp OP$ và nằm trong đáy $(O\ ;\ r)$. Các đường sinh AD và BC cùng với các dây cung AB và DC (thuộc đáy $(O'\ ;\ r)$) xác định cho ta thiết diện cần tìm là một hình chữ nhật. Gọi S là diện tích hình chữ nhật này, ta có : $S_{ABCD} = AB.AD$ trong đó $AD = 2r$ còn $AB = 2AH$. Vì H là trung điểm của OP nên ta tính được $AB = r\sqrt{3}$. Vậy $S_{ABCD} = 2r^2\sqrt{3}$.

c) Đường tròn giao tuyến của mặt cầu đường kính OO' và mặt phẳng $(ABCD)$ có bán kính bằng $\frac{AB}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot$ Đường tròn này có tâm là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và tiếp xúc với hai cạnh AD, BC của hình chữ nhật đó.