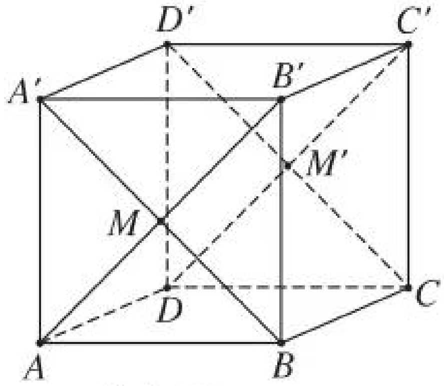
III- ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1

Câu 1. (h.1.33) Ta có $A'B \perp AB'$, $A'B \perp B'C' \Rightarrow A'B \perp (ADC'B')$. Để ý rằng $A'B$ cắt $(ADC'B')$ tại trung điểm M của nó, do đó A' và B đối xứng với nhau qua mặt phẳng $(ADC'B')$. Tương tự, D' và C đối xứng với nhau qua mặt phẳng $(ADC'B')$. Phép đối xứng qua mặt phẳng $(ADC'B')$ biến tứ diện $ABCB'$ thành tứ diện $AA'D'B'$ nên hai tứ diện đó bằng nhau.



Hình 1.33

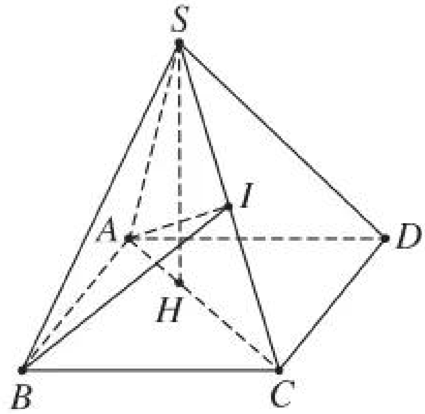
Câu 2. (h.1.34) a) Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng

$$\frac{1}{3}a^2\frac{4}{3}a = \frac{4a^3}{9}.$$

b) Ta có $AS^2 = AH^2 + SH^2$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{16a^2}{9} = 2a^2 = AC^2.$$

Do đó tam giác ASC cân ở A. Suy ra I là trung điểm của SC.



Hình 1.34

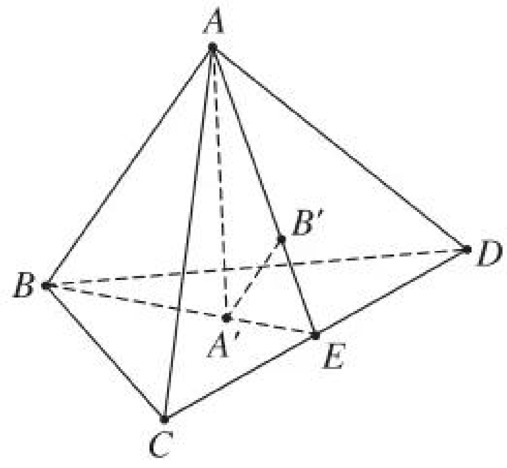
$$V_{ABSI} = V_{S.ABI} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{9}.$$

Đề 2

Câu 1. (h.1.35) a) Gọi E là trung điểm của CD. Khi đó $\frac{EB'}{EA} = \frac{EA'}{EB}$.

Suy ra $B'A' \,//\, AB$ và $B'A' = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}a.$

Tương tự các cạnh khác của tứ diện $A'B'C'D'$ cũng bằng $\frac{1}{3}a$ nên $A'B'C'D'$ là một khối tứ diện đều.



Hình 1.35

b) Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD). Vì $AB = AC = AD$ nên $HB = HC = HD$. Suy ra : $H \equiv A'$.

Ta có : $AA' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Vì tứ diện $A'B'C'D'$ đồng dạng với tứ diện $ABCD$ với tỉ số đồng dạng là $k = \frac{1}{3}$,

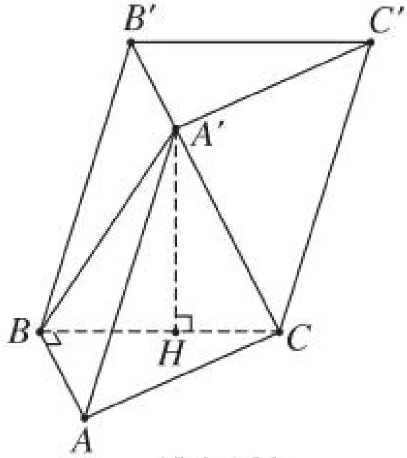
nên $V_{A'B'C'D'} = \frac{1}{27}V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{324}a^3.$

Câu 2. (h.1.36) a) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A' đến (ABC).

Vì $(A'BC) \perp (ABC)$ nên H thuộc đường thẳng BC. Vì $AB \perp BH$ nên $AB \perp BA'$. Ta có :

$A'B = \sqrt{A'A^2 - AB^2} = 4a$;

$A'H = A'B\sin 60^\circ = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$;



Hình 1.36

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9a^2}{2} 2a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}a^3.$$

b) Ta có :

$$\mathrm{V}_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = 3\sqrt{3}a^3 \;\; ; \;\; S_{ABA'} = \frac{1}{2} A'B.AB = \frac{1}{2} 4a.3a = 6a^2.$$

Vì $\mathrm{V}_{A'.ABC} = \mathrm{V}_{C.ABA'} = \frac{1}{3} S_{ABA'}.d(C,(ABA'))$

$$\Rightarrow d(C,(ABA')) = \frac{3V_{A'.ABC}}{S_{ABA'}} = \frac{9\sqrt{3}a^3}{6a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

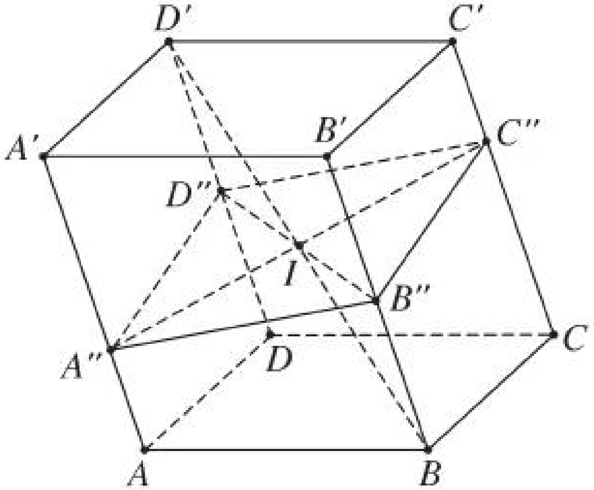
Chú ý : Có thể giải câu b) bằng cách khác như sau :

$$\begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'BC) \Rightarrow (ABB'A') \perp (A'BC)$$

$$\Rightarrow d(C,(ABB'A')) = d(C, A'B) = BC \sin 60^{\circ} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Đề 3

Câu 1. (h.1.37) Giả sử (P) cắt AA', BB', CC', DD' lần lượt tại A'', B'', C'', D''. Vì A'', I, C'' là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(BDD'B')$ nên chúng thẳng hàng. Tương tự B'', I, D'' thẳng hàng. Vì $(ABB'A')$ song song với $(DCC'D')$ nên $A''B'' \parallel D''C''$. Tương tự, $B''C'' \parallel A''D''$. Suy ra $A''B''C''D''$ là hình bình hành.



Hình 1.37

Mặt phẳng (P) chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện còn lại. Phép đối xứng qua tâm I biến (H) thành (H') nên hai khối đa diên (H) và (H') bằng nhau. Từ đó suy ra :

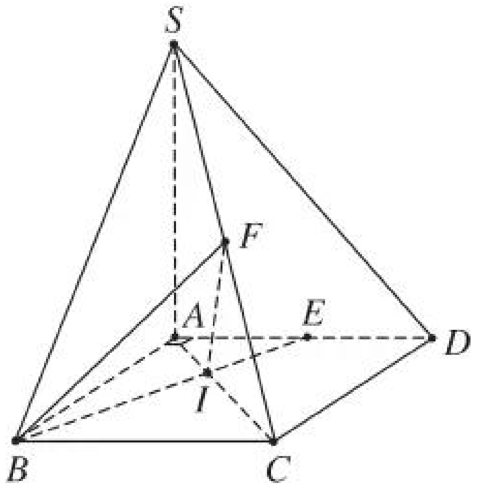
$$V_H = V_{H'} = \frac{V}{2}.$$

Câu 2. (h.1.38) a) Vì I là trọng tâm của tam giác ABD nên $AI = \frac{1}{3}AC$.

Do đó : $S_{BIC} = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}aa\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Vì F là trung điểm của SC nên : $d(F,(IBC)) = \frac{1}{2}d(S,(IBC)) = \frac{a}{2}$.

Suy ra : $V_{F.IBC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{18}a^3$.



Hình 1.38

b) Vì $SF = CF$ nên $d(S,(BIF)) = d(C,(BIF))$.

Do đó : $V_{S.BIF} = V_{C.BIF} = V_{F.IBC} = \frac{\sqrt{2}}{18}a^3$.

c) Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}a^2\sqrt{2}.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Suy ra : $V_{B.SAIF} = V_{SABC} - V_{F.IBC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} - \frac{a^3\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$.