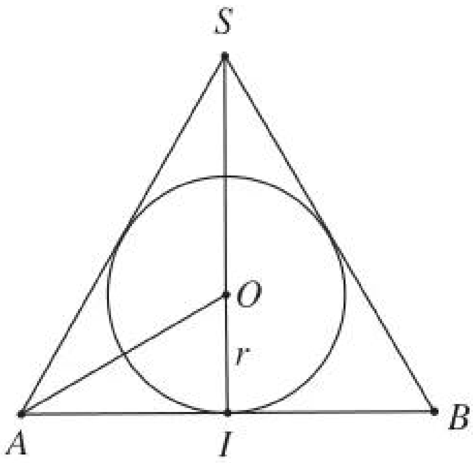
III- ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1



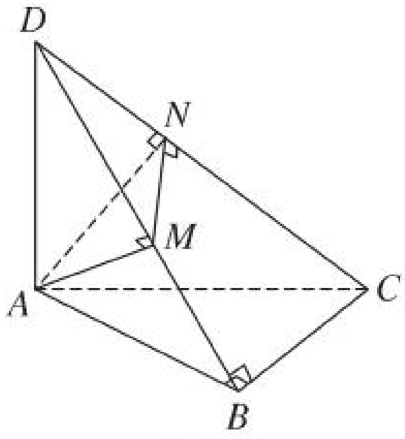
Hình 2.55

Câu 1. (h.2.55) a) Gọi S là đỉnh của hình nón (H), (H') là hình cầu nội tiếp (H). Mặt phẳng (P) đi qua trục của hình nón (H) cắt (H) theo tam giác cân SAB và cắt hình cầu (H') theo đường tròn tâm O nội tiếp tam giác SAB. Vì $\widehat{SAB} = 60^o$ nên tam giác SAB là tam giác đều. Từ đó suy ra bán kính đường tròn đáy của hình nón (H) bằng :

$$IA = SI.\cot 60^o = h\frac{\sqrt{3}}{3}; \; V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{3}h = \frac{\pi h^3}{9}.$$

b) Bán kính hình cầu (H') bằng : $OI = IA\tan 30^o = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{3}$.

Suy ra : $V_{(H')} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{h}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{81}\pi h^3$.



Hình 2.56

Câu 2. (h.2.56) a) Ta có :

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AM.$$

$$\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BD \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCD) \Rightarrow AM \perp MC.$$

$\widehat{ABC} = \widehat{AMC} = \widehat{ANC} = 90^o \Rightarrow A, C, B, M, N$ nằm trên mặt cầu (S) đường kính $AC = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$.

b) $\widehat{AMD} = \widehat{AND} = 90^o \Rightarrow A, D, M, N$ nằm trên mặt cầu (S') đường kính AD.

(S) và (S') có ba điểm chung là A, M, N.

Ta có : $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp MC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BMC) \Rightarrow AM \perp MN.$

Từ đó suy ra $(S) \cap (S')$ theo đường tròn đường kính AN với :

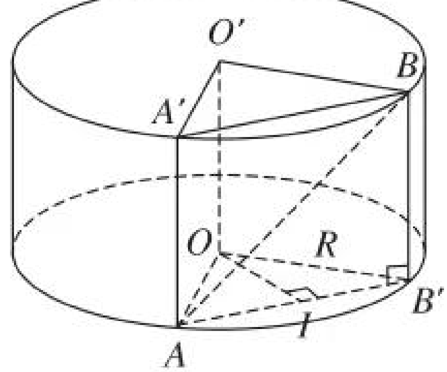
$$AN = \frac{AD.AC}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \frac{4a.5a}{\sqrt{16a^2 + 25a^2}} = \frac{20a}{\sqrt{41}}.$$

Do đó bán kính đường tròn $(S) \cap (S')$ bằng $\dfrac{10\sqrt{41}}{41}a$.

Đề 2

Câu 1. (h.2.57) Gọi AA', BB' lần lượt là những đường sinh qua A, B của (H). Khi đó tam giác ABB' vuông tại B'. Suy ra : $AB' = \sqrt{AB^2 - B'B^2} = R\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AB'.

Khi đó $OI \perp AB'$.



Hình 2.57

Do đó $OI = \sqrt{OB'^2 - IB'^2} = \dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow \; S_{OAB'} = \dfrac{1}{2}R\sqrt{3}\dfrac{R}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra :

$V_{ABOO'} = V_{B.AOO'} = V_{B.AA'O'} = V_{A.A'BO'}$

$$= \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} = \frac{1}{3}\frac{R^2\sqrt{3}}{4}R = \frac{\sqrt{3}R^3}{12}; \; V_{(H)} = \pi R^3.$$

Vậy $\dfrac{V_{ABOO'}}{V_{(H)}} = \dfrac{\sqrt{3}}{12\pi}$.

Câu 2.

a) Hình cầu đó có tâm là giao của các đường chéo của hình hộp chữ nhật, nên bán kính của (S) là $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Thể tích $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

b) Thể tích của hình hộp bằng $V = xyz$. Gọi R là bán kính hình cầu (S). Ta có :

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{4R^2}{3}.$$

Suy ra V lớn nhất $\Leftrightarrow V^2 = x^2y^2z^2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2$

$\Leftrightarrow x = y = z.$

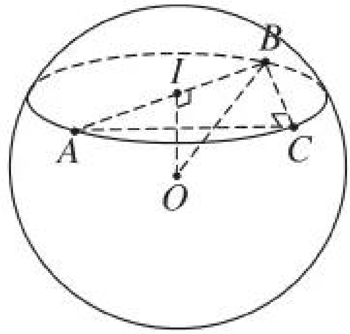
Do đó trong số những hình hộp chữ nhật nội tiếp hình cầu (S) cho trước, hình lập phương là hình có thể tích lớn nhất.

Đề 3

Câu 1. (h.2.58) Tam giác ABC có $AB^2 = AC^2 + BC^2$ nên nó vuông tại C. Mặt phẳng (ABC) cắt (S) theo đường tròn đường kính AB. Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $OI = 2a$.

Suy ra $OB = \sqrt{\left(\dfrac{5a}{2}\right)^2 + 4a^2} = \dfrac{\sqrt{41}}{2}a$.

Vậy $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{41}}{2}\right)^3 = \dfrac{41\sqrt{41}}{6}\pi a^3$.



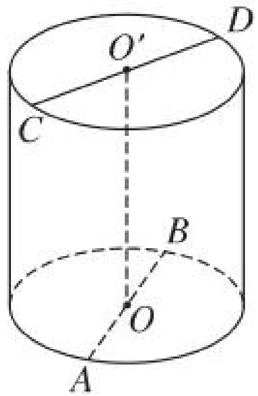
Hình 2.58

Câu 2. (h.2.59) Thể tích khối trụ (H) là $V_{(H)} = \pi R^2 h$, thể tích khối tứ diện $ABCD$ là :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.\sin\alpha.h = \frac{2}{3}R^2 h\sin\alpha\ ;$$

Suy ra : $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{(H)}} = \dfrac{2\sin\alpha}{3\pi} \leq \dfrac{2}{3\pi}$.

Tỉ số đó là lớn nhất bằng $\dfrac{2}{3\pi}$ khi $\alpha = 90^\circ$.



Hình 2.59