§1 BẤT ĐẲNG THỨC (2 tiết)

A – MỤC TIÊU

Hiểu được các khái niệm về bất đẳng thức (bất đẳng thức ngặt, bất đẳng thức không ngặt, bất đẳng thức hệ quả, bất đẳng thức tương đương).

Nắm được các tính chất của bất đẳng thức một cách hệ thống, đặc biệt là các điều kiện của một số tính chất bất đẳng thức (cơ sở của các phép biến đổi bất phương trình sẽ học trong tiết §2).

Vận dụng được bất đẳng thức Cô-si và một số bất đẳng thức cơ bản chứa giá trị tuyệt đối.

B – NỘI DUNG

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. **1** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

a) $3{,}25 < 4$;

b) $-5 > -4\frac{1}{4}$;

c) $-\sqrt{2} \leq 3$?

Ở lớp 8 THCS, học sinh đã được học khái niệm bất đẳng thức (so sánh hai số thực a và b có thể xảy ra ba khả năng : số *a bằng* số b, kí hiệu $a = b$; số *a nhỏ hơn* số b, kí hiệu $a < b$; số *a lớn hơn* số b, kí hiệu $a > b$. *Gọi hệ thức* dạng $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ *là bất đẳng thức*). Mặt khác, trong chương I Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán, học sinh đã được học khái niệm mệnh đề, với các hiểu biết đó các em học sinh có thể dễ dàng tiến hành các hoạt động trên. Trong thực tế, các em rất dễ nhận ra a) là mệnh đề đúng, một số em nhầm rằng mệnh đề b) đúng, đặc biệt rất nhiều em cho rằng c) là mệnh đề sai (vì dấu "=" không xảy ra). Sai lầm đó có căn nguyên là học sinh chưa được học mệnh đề tuyển. Thực chất mệnh đề "$a \leq b$" là mệnh đề tuyển "$a < b$" hoặc "$a = b$", do đó mệnh đề "$a \leq b$" chỉ sai khi cả hai mệnh đề "$a < b$" và "$a = b$" đều sai. Vì vậy mệnh đề c) đúng.

2. **2** Chọn dấu thích hợp (=, <, >) để khi điền vào ô vuông ta được một mệnh đề đúng

a) $2\sqrt{2} \ \square\ 3$;

b) $\frac{4}{3} \ \square\ \frac{2}{3}$;

c) $3 + 2\sqrt{2} \ \square\ (1 + \sqrt{2})^2$;

d) $a^2 + 1 \ \square\ 0$ với a là một số đã cho.

Học sinh dễ dàng đi đến lựa chọn đúng sau

Dấu "<" cho câu a)
Dấu ">" cho câu b)
Dấu "=" cho câu c)
Dấu ">" cho câu d).

Giáo viên cần chú ý rằng giả thiết a là *một số đã cho* bảo đảm câu d) là một mệnh đề.

3. **3** Chứng minh rằng $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Chứng minh

Cộng $-b$ vào hai vế của bất đẳng thức $a < b$ ta được bất đẳng thức hệ quả $a - b < 0$.

Đảo lại, cộng b vào hai vế của bất đẳng thức $a - b < 0$ ta được bất đẳng thức hệ quả $a < b$.

Vì vậy $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Hoạt động **3** được đưa ra ngay sau khi giới thiệu khái niệm bất đẳng thức tương đương nhằm minh hoạ khái niệm này, đồng thời cung cấp cho học sinh cơ sở lí luận của một phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Để chứng minh một bất đẳng thức ta chỉ cần xét dấu của hiệu hai vế bất đẳng thức đó.

Giáo viên cần lưu ý rằng lẽ ra phải sử dụng khẳng định trong hoạt động **3** làm định nghĩa bất đẳng thức. Tuy nhiên, quán triệt tinh thần chung của SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán là chỉ giới thiệu các khái niệm một cách nhẹ nhàng, không phát biểu các định nghĩa tường minh, chúng tôi ôn lại các khái niệm, tính chất đã quen sử dụng ở các lớp dưới thông qua việc thực hiện các hoạt động **1** ; **2** và **3**. Để thuận tiện cho giáo viên, chúng tôi xin tóm tắt những kiến thức về bất đẳng thức đã được trình bày ở THCS.

a) Ở THCS, các vấn đề về bất đẳng thức chỉ được giới thiệu trong chương IV – Toán 8, các tiết : §1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng ; §2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân (từ trang 35 đến trang 40).

b) Tiết §1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng gồm

Nhắc lại về thứ tự trên tập số

Bất đẳng thức

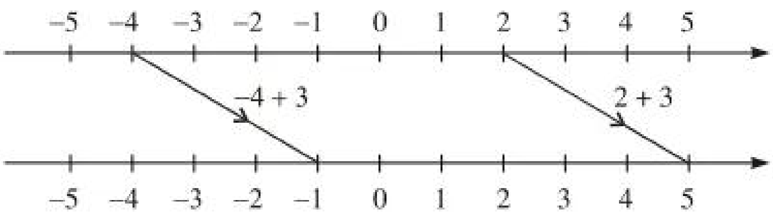
Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.

c) Với hai số thực *a* và *b*, xảy ra một trong ba khả năng : số *a* bằng số *b*, số *a* nhỏ hơn số *b*, số *a* lớn hơn số *b*, lần lượt được kí hiệu là $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Nếu số *a* không nhỏ hơn số *b*, tức là *a* lớn hơn hoặc bằng *b*, thì ta kí hiệu $a \geq b$, nếu số *a* không lớn hơn số *b* tức là *a* nhỏ hơn hoặc bằng *b* thì kí hiệu $a \leq b$.

Các hệ thức dạng $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ được gọi là những bất đẳng thức.

d) Hình vẽ 5



Hình 5

minh hoạ kết quả : Cộng 3 vào cả hai vế của bất đẳng thức $-4 < 2$ thì được bất đẳng thức $-4 + 3 < 2 + 3$.

Từ đó rút ra tính chất

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$
$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$
$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$
$$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c.$$

e) Tiết §2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân gồm

Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

Tính chất bắc cầu của thứ tự.

g) Bằng một ví dụ cụ thể và minh hoạ hình học, SGK Toán 8 đi đến những kết luận tổng quát

$$\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow ac < bc \\ a \leq b \Rightarrow ac \leq bc \end{array}\right. \quad (\text{nếu } c > 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow ac > bc \\ a \geq b \Rightarrow ac \geq bc \end{array}\right. \quad (\text{nếu } c > 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow ac > bc \\ a \leq b \Rightarrow ac \geq bc \end{array}\right. \quad (\text{nếu } c < 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow ac < bc \\ a \geq b \Rightarrow ac \leq bc \end{array}\right. \quad (\text{nếu } c < 0)$$

$$a < b \text{ và } b < c \Rightarrow a < c.$$

Như vậy, có thể thấy rõ nội dung bất đẳng thức được trình bày trong SGK Toán 8 rất sơ sài và chủ yếu dựa trên cơ sở trực giác, vì vậy không thể chứng minh các tính chất đã rút ra một cách chính xác. Để có thể xây dựng cơ sở lí luận cho phép chứng minh các tính chất bất đẳng thức thực ra phải có định nghĩa chính xác quan hệ thứ tự "$a \leq b$" như sau

$$\boxed{a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+}$$

Tuy nhiên, quán triệt tinh thần chủ đạo là giảm tải, chúng ta dựa trên cơ sở thói quen dùng các tính chất thông thường của bất đẳng thức, hệ thống hoá các tính chất nhấn mạnh khâu vận dụng cho học sinh. Đặc biệt nhấn mạnh đến các điều kiện cần được thực hiện khi vận dụng các tính chất của bất đẳng thức nhằm khắc phục các sai lầm thường gặp trong học sinh và chuẩn bị cơ sở cho việc học tập các biến đổi bất phương trình trong tiết sau.

4. **4** Nêu ví dụ áp dụng một trong các tính chất trên.

Với đối tượng học sinh khá có thể dễ dàng chỉ ra nhiều ví dụ áp dụng các tính chất của bất đẳng thức. Nếu cần giúp đỡ, theo chúng tôi, giáo viên nên chọn những ví dụ đơn giản, hay gặp trong quá trình học tập của các em. Chẳng hạn, xét ví dụ sau

> Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với điều kiện $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Viết công thức nghiệm của phương trình và chỉ ra nghiệm bé, nghiệm lớn.

Ví dụ này nhằm giúp học sinh khắc phục sai lầm thường gặp khi các em cho rằng $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ là nghiệm bé, $x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ là nghiệm lớn. Sai lầm này xuất phát từ thói quen sử dụng tính chất nhân hai vế một bất đẳng thức với một số nhưng không quan tâm đến điều kiện về dấu của nhân tử được cùng nhân vào hai vế.

II – BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

Ở lớp 8 THCS, Bất đẳng thức Cô-si đã được giới thiệu trong mục "*Có thể em chưa biết*" (trang 40, 41 – SGK Toán 8) và có thể tìm được cách chứng minh trong Sách bài tập.

SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán bên cạnh việc phát biểu bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, còn đưa ra phép chứng minh bất đẳng thức này nhằm mục đích

Thông qua phép chứng minh, giới thiệu cho học sinh một phương pháp chứng minh một bất đẳng thức.

Rèn luyện kĩ năng vận dụng bất đẳng thức Cô-si, thông qua đó giúp học sinh làm quen với các khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và các ứng dụng trong thực tiễn toán học.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Kết thúc tiết học, chúng tôi tổng kết các tính chất quan trọng nhất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối (không trình bày định nghĩa giá trị tuyệt đối và không chứng minh các tính chất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối). Một số tính chất có thể suy từ các tính chất khác, chẳng hạn tính chất $|x| \geq x$ suy ra tính chất $|x| \geq -x$ hoặc tính chất $|a + b| \leq |a| + |b|$ kéo theo tính chất $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$. Tuy nhiên, chúng tôi cũng trình bày đầy đủ tất cả các tính chất này.

C – HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

1. a) Sai với mọi $x \le 0$; b) Sai với mọi $x \ge 0$;

c) Sai khi $x = 0$; d) Đúng với mọi giá trị của x.

2. Vì $\forall x > 5$ ta có $\dfrac{5}{x} < 1$, suy ra C luôn âm, còn A, B, D đều luôn dương. Do đó C nhỏ nhất.

3. a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên a, b, c và $a + b - c$, $a + c - b$ đều dương, do đó $a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c) > 0$.

Vậy $$(b - c)^2 < a^2. \qquad (1)$$

b) Tương tự từ câu a) ta cũng có

$$(c - a)^2 < b^2 \qquad (2)$$

và $$(a - b)^2 < c^2. \qquad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta có

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 < a^2 + b^2 + c^2.$$

Do đó $$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) < a^2 + b^2 + c^2$$

hay $$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

4. Xét hiệu $(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y)$

$$= (x + y)(x^2 - 2xy + y^2) = (x + y)(x - y)^2 \ge 0,\ \forall x \ge 0,\ \forall y \ge 0.$$

Do đó $$x^3 + y^3 \ge x^2y + xy^2, \quad \forall x \ge 0,\ \forall y \ge 0.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y \ge 0$.

5. Đặt $\sqrt{x} = t$ $(t \ge 0)$ thì

$$x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 = t^8 - t^5 + t^2 - t + 1.$$

Khi $0 \le x < 1$ thì $0 \le t < 1$ và

$$t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 = t^8 + t^2(1 - t^3) + (1 - t) > 0.$$

Khi $x \geq 1$ thì $t \geq 1$ và

$$t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 = t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0.$$

Kết luận. Vậy $x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0$, $\forall x \geq 0$.

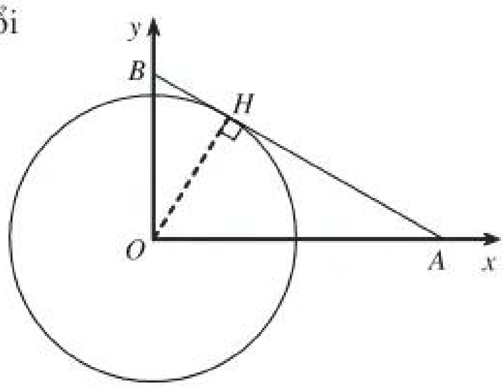
6. (h.6) Ta có $HA.HB = OH^2 = 1$ không đổi

$$AB = HA + HB \geq 2\sqrt{HA.HB} = 2$$

$\Rightarrow AB \geq 2.$

Hơn nữa, $AB = 2 \Leftrightarrow HA = HB \Leftrightarrow \Delta OAB$ vuông cân ở $O \Leftrightarrow$ các tam giác OHB và OHA vuông cân, có cạnh góc vuông bằng $1 \Leftrightarrow OA = OB = \sqrt{2}$.

Vậy đoạn AB có độ dài nhỏ nhất khi $A(\sqrt{2}; 0)$ và $B(0; \sqrt{2})$.



Hình 6