§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN (3 tiết)

A – MỤC TIÊU

Giới thiệu cho học sinh các khái niệm cơ bản : bất phương trình, hệ bất phương trình một ẩn ; nghiệm và tập nghiệm của bất phương trình ; điều kiện của bất phương trình ; giải bất phương trình.

Giúp các em học sinh làm quen với một số phép biến đổi bất phương trình thường dùng.

B – NỘI DUNG

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. **1** Cho một ví dụ về bất phương trình một ẩn, chỉ rõ vế trái và vế phải của bất phương trình này.

Trong SGK Toán 8, chương IV, §3 học sinh đã biết

$$2200x + 4000 \leq 25\,000$$

$$x^2 \leq 6x - 5$$

là những bất phương trình và đã quen sử dụng thuật ngữ vế trái, vế phải của một bất phương trình. Dựa vào hoạt động của học sinh, giáo viên có thể dễ dàng giúp học sinh khái quát đến khái niệm bất phương trình một ẩn như đã nêu trong SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán.

2. **2** Cho bất phương trình $2x \leq 3$.

a) Trong các số -2 ; 0 ; $2\frac{1}{2}$; π ; $\sqrt{10}$ số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của bất phương trình trên ?

b) Giải bất phương trình đó và biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số.

Với các kiến thức về bất phương trình đã học ở lớp 8 THCS, học sinh dễ dàng thực hiện hoạt động này, thông qua đó ôn lại các khái niệm nghiệm, tập nghiệm và biểu diễn tập nghiệm. Từ đó, giáo viên dễ dàng tổng kết lại các kiến thức đã ôn tập thành các khái niệm tương ứng áp dụng cho bất phương trình tổng quát như đã nêu trong SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Chúng tôi lựa chọn giải pháp trình bày khái niệm hệ bất phương trình một ẩn ngay sau khi giới thiệu các khái niệm về bất phương trình một ẩn vì những lí do sau đây

Các khái niệm về hệ bất phương trình một ẩn là mở rộng tự nhiên các khái niệm tương ứng về bất phương trình một ẩn, học sinh có thể dễ dàng tiếp thu.

Lí do xuất hiện bài toán giải hệ bất phương trình một ẩn cũng rất tự nhiên, chẳng hạn yêu cầu giải hệ bất phương trình trong ví dụ 1 xuất hiện tự nhiên khi muốn tìm tập các giá trị của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x + 1} \leq x^2$.

Chuẩn bị cơ sở lí luận cho các phép biến đổi tương đương bất phương trình. Trong thực tế ta thường gặp những phép biến đổi biến một bất phương trình thành một hệ bất phương trình tương đương (bất phương trình tương đương với một hệ bất phương trình là trường hợp đặc biệt của hai hệ bất phương trình tương đương).

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. **3** Hai bất phương trình trong **Ví dụ 1** có tương đương hay không ? Vì sao ?

Trang 42 - SGK Toán 8 đã định nghĩa hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng tập nghiệm. Tuy nhiên nhiều khả năng học sinh chưa nắm vững khái niệm này (trong chương trình Toán 8 THCS không đi sâu vào vấn đề này) vì vậy hoạt động **3** chỉ là tạo lí do để giáo viên nhắc lại khái niệm bất phương trình tương đương thông qua một ví dụ cụ thể. Hai bất phương trình trong ví dụ 1 được chọn rất đơn giản, nhằm mục đích cho học sinh có khả năng thấy ngay được tập nghiệm, do đó có thể so sánh ngay hai tập nghiệm đó. Ta thấy tập nghiệm của hai bất phương trình đó là hai khoảng $(-\infty\ ;\ 3]$ và $[-1\ ;\ +\infty)$. Vì vậy chúng không tương đương.

2. Khái niệm hệ bất phương trình tương đương được định nghĩa hoàn toàn tương tự khái niệm hệ phương trình tương đương. Trong SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán, ví dụ được xét gồm hai bất phương trình bậc nhất đã biết cách giải

Bất phương trình $3 - x \geq 0$ tương đương với bất phương trình $3 \geq x$;

Bất phương trình $x + 1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình $x \geq -1$.

Vì vậy hệ bất phương trình $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ tương đương với hệ bất phương trình $\begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -1. \end{cases}$

Ta viết

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -1. \end{cases}$$

3. Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm (các phép biến đổi như thế được gọi là các phép biến đổi tương đương).

Vì vậy để giải bất phương trình, hệ bất phương trình, học sinh phải nắm được các phép biến đổi tương đương bất phương trình – hệ bất phương trình. SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán lựa chọn giới thiệu ba phép biến đổi cơ bản nhất là

Cộng, trừ hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức.

Nhân, chia hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức.

Bình phương hai vế một bất phương trình.

4. Các ví dụ 2, 3, 4 được lựa chọn sao cho không quá phức tạp mà cũng không tầm thường, minh hoạ cho ba phép biến đổi đã nêu. Nhằm mục đích phân biệt rõ ràng phần giảng của giáo viên và nội dung trình bày lời giải của các ví dụ, trước khi viết bài giải, khi cần chúng tôi có trình bày *phân tích bài toán*. Chẳng hạn trong ví dụ 2, phần phân tích bài toán chỉ rõ cơ sở của dãy các phép biến đổi tương đương trong lời giải là các phép biến đổi đồng nhất, phép cộng vào hai vế bất phương trình với một biểu thức là những phép biến đổi tương đương.

5. Vì lí do sư phạm, chúng tôi không đi sâu vào phân tích các phép biến đổi đồng nhất. Thực ra, ngay từ THCS các em học sinh đã thường xuyên phải biến đổi đồng nhất nhưng không ý thức được rằng đa số các phép biến đổi như thế không có tính thuận nghịch. Chẳng hạn, khi thay (rút gọn) $x^2 + \sqrt{x-1} + 2x - \sqrt{x-1}$ bởi $x^2 + 2x$ ta đã mở rộng tập xác định của biểu thức đã cho, vì thế nếu trong phép biến đổi phương trình – bất phương trình có thực hiện phép rút gọn đó thì có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai. Tương tự như vậy, các phép biến đổi đồng nhất sau đây làm thay đổi điều kiện (tập xác định) của biểu thức

$$f(x) + g(x) - g(x) = f(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = f(x)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = f(x)$$

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x).g(x)}$$

v.v...

Như vậy, cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức ta được một bất phương trình tương đương. Tuy nhiên, nếu thực hiện phép biến đổi đồng nhất khi cộng (trừ) hai vế bất phương trình với một biểu thức mà làm thay đổi điều kiện của bất phương trình thì có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai. Để học sinh dễ tiếp thu, chúng tôi đã phát biểu định lí dưới dạng đã nêu trong SGK.

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)}$$

Trường hợp đặc biệt ta có

$$P(x) < Q(x) + f(x) \Leftrightarrow P(x) + (-f(x)) < (Q(x) + f(x)) + (-f(x))$$

$$\Leftrightarrow P(x) - f(x) < Q(x)$$

từ đó dẫn đến "quy tắc chuyển vế" quen thuộc học sinh đã học ở lớp 8 THCS.

6. **Ví dụ 2**

Giải bất phương trình

$$(x + 2)(2x - 1) - 2 \leq x^2 + (x - 1)(x + 3).$$

Ví dụ này được lựa chọn để có một bất phương trình không quá đơn giản (không là bất phương trình bậc nhất quen thuộc đã học ở lớp 8) và chỉ bằng những phép biến đổi đồng nhất và phép chuyển vế đổi dấu (thực chất là phép cộng vào hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức) có thể đưa bài toán về giải một bất phương trình bậc nhất đơn giản.

Vì phép khai triển và rút gọn thường làm xuất hiện nghiệm ngoại lai hoặc làm mất nghiệm nên bất phương trình ở ví dụ 2 đã được lựa chọn để có hai vế xác định với mọi x. Trong SGK cũng chỉ nêu những bất phương trình loại này. Chúng tôi cũng nhấn mạnh là trong chương trình GDTHPT môn Toán, giáo viên nên tránh đưa ra những bài toán dẫn đến những phép biến đổi đồng nhất làm thay đổi điều kiện của bất phương trình.

7. **Ví dụ 3**

Giải bất phương trình

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} > \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

Học sinh đã có thói quen đưa bất phương trình có mẫu thức về bất phương trình đa thức bằng cách khử mẫu thức (nhân hai vế bất phương trình với biểu thức $(x^2 + 2)(x^2 + 1)$). Dụng ý của chúng tôi là cho học sinh gặp một tình huống không quá đơn giản (nhân bất phương trình với một số) và cũng không quá phức tạp (nhân với một biểu thức có dấu thay đổi), ngoài ra thực hiện các phép biến đổi đồng nhất không làm thay đổi tập xác định. Vì vậy trong trường hợp này ta được bất phương trình tương đương.

8. **Ví dụ 4**

Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} > \sqrt{x^2 - 2x + 3}.$$

Bất phương trình này rất thuận lợi cho học sinh thực hiện phép bình phương khử căn vì hai vế của nó luôn có nghĩa và dương với mọi x. Hơn nữa bất phương trình nhận được sau phép bình phương là $x^2 + 2x + 2 > x^2 - 2x + 3$.

Có thể tổng quát hoá cho học sinh cách giải bất phương trình dạng

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}.$$

Ta có

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

9. Chú ý 1) đã chỉ ra cách khắc phục tình trạng có thể xuất hiện nghiệm ngoại lai khi thực hiện các phép biến đổi đồng nhất (bất phương trình ban đầu tương đương với một hệ bất phương trình bao gồm bất phương trình nhận được sau biến đổi và các điều kiện của bất phương trình ban đầu).

10. **Ví dụ 5**

Giải bất phương trình

$$\frac{5x + 2\sqrt{3 - x}}{4} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{4 - 3\sqrt{3 - x}}{6}.$$

Cần lưu ý rằng việc thực hiện phép biến đổi đồng nhất rút gọn biểu thức chứa căn đã làm mở rộng tập xác định của bất phương trình và có thể làm xuất hiện nghiệm ngoại lai. Vì vậy bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{3} > 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$$

gồm bất phương trình nhận được sau biến đổi và điều kiện của bất phương trình đã cho.

11. Vì phép nhân (chia) hai vế của bất phương trình với một biểu thức $f(x)$ chỉ được đề cập trong những trường hợp đơn giản nhất là biểu thức đó có dấu không đổi nên chú ý 2) gợi ý cách giải quyết trong trường hợp tổng quát. Cụ thể là việc xét dấu $f(x)$ sẽ chia tập xác định của bất phương trình thành những khoảng trên đó $f(x)$ có dấu không đổi, do đó bất phương trình cần giải tương đương với một tập hợp hệ bất phương trình. Trong ví dụ 6, việc xét dấu $f(x) = x - 1$ dẫn đến việc xét bất phương trình trong hai trường hợp.

12. **Ví dụ 6**

Giải bất phương trình $$\frac{1}{x-1} \geq 1.$$

Ví dụ này nhằm khắc phục sai lầm thường gặp của học sinh (nhân hai vế của bất phương trình đã cho với biểu thức $x - 1$ mà không để ý đến dấu của biểu thức $x - 1$).

Sau khi học cách xét dấu nhị thức bậc nhất nên hướng dẫn học sinh giải bất phương trình này bằng cách xét dấu $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - 1.$

13. **Ví dụ 7**

Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + \frac{17}{4}} > x + \frac{1}{2}.$$

Dạng tổng quát của bất phương trình này là $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Ta có

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

C – HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -1\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3 ; 2 ; -2\}$;

c) $x \neq -1$; d) $x \in (-\infty ; 1] \setminus \{-4\}$.

2. a) Vì $x^2 + \sqrt{x+8} \geq 0,\ \forall x \geq -8$.

b) Vì $\sqrt{1 + 2(x-3)^2} \geq 1$ và $\sqrt{5 - 4x + x^2} = \sqrt{1 + (x-2)^2} \geq 1,\ \forall x$.

c) Vì $\sqrt{1 + x^2} < \sqrt{7 + x^2} \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} < 0,\ \forall x$.

3. a) Nhân hai vế bất phương trình thứ nhất với -1 và đổi chiều ta được bất phương trình thứ hai (tương đương).

b) Chuyển vế và đổi dấu các hạng tử ta được bất phương trình tương đương.

c) Cộng vào hai vế bất phương trình với biểu thức $\dfrac{1}{x^2+1}$ không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được bất phương trình tương đương.

d) Hai bất phương trình có điều kiện chung là $x \geq 1$. Trên tập các giá trị này của x thì biểu thức $2x + 1 > 0$ nên nhân hai vế bất phương trình thứ nhất với biểu thức $2x + 1$ ta được bất phương trình thứ hai (tương đương).

4. a) $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3(3x+1) - 2(x-2)}{6} - \dfrac{1-2x}{4} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+7}{6} + \frac{2x-1}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 14x + 14 + 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow 20x < -11$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{11}{20}.$$

b) $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 - 3x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 + x^2 - 5$

$\Leftrightarrow 1 \leq -5$ vô nghiệm.

5. a) Giải từng bất phương trình của hệ

$$6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \Leftrightarrow 2x < 7 - \frac{5}{7}$$

$$\Leftrightarrow 2x < \frac{44}{7} \Leftrightarrow x < \frac{22}{7}.$$

$$\frac{8x+3}{2} < 2x+5 \Leftrightarrow 8x+3 < 4x+10$$

$$\Leftrightarrow 4x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x < \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}.$$

b) Giải tương tự, nghiệm của hệ là $\frac{7}{39} < x < 2$.