§3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC (3 tiết)

A – MỤC TIÊU

Biết áp dụng các công thức cộng, công thức nhân đôi và công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích để giải các bài toán đơn giản như tính giá trị lượng giác của một góc, rút gọn những biểu thức lượng giác đơn giản và chứng minh một số đẳng thức.

B – NỘI DUNG

I – CÔNG THỨC CỘNG

Đối với chương trình GDTHPT môn Toán lớp 10, SGK không trình bày toàn bộ chứng minh các công thức cộng, mà công nhận công thức

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

rồi chứng minh các công thức sau là hệ quả của công thức trên

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\ ;$$

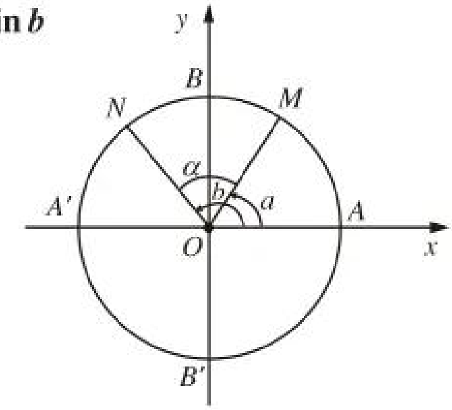
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b\,.$$

Việc chứng minh này nhằm ôn lại cho học sinh về quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc đối nhau, phụ nhau đã học trong tiết trước.

Hoạt động **1** xem như bài tập đối với những học sinh khá. Nếu không đủ thời gian hoặc trình độ học sinh thấp, có thể bỏ qua hoạt động này mà công nhận tiếp các công thức còn lại để sử dụng.

Công thức $\boldsymbol{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$

được chứng minh như sau



Hình 28

Ta coi a và b lần lượt là số đo bằng rađian của hai cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ và $\overset{\curvearrowright}{AN}$. Gọi α $(0 \le \alpha \le \pi)$ là số đo bằng rađian của góc hình học $\widehat{MON}$ (hay cung nhỏ hình học $\overset{\frown}{MN}$) (h. 28).

Xét tích vô hướng $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$. Một mặt ta có

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM.ON.\cos\alpha = 1.1.\cos\alpha = \cos\alpha. \qquad (*)$$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{OM} = (\cos a\,;\,\sin a)$, $\overrightarrow{ON} = (\cos b\,;\,\sin b)$ nên

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a\cos b + \sin a\sin b. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra

$$\cos\alpha = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

Để hoàn thành chứng minh định lí, ta phải chứng tỏ $\cos\alpha = \cos(a-b)$.

Xét cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{MN}$ ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{MN} = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác, theo hệ thức Sa-lơ

$$\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{MN} = \text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{AN} - \text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{AM} + m2\pi$$

$$= b - a + m2\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Do đó $\qquad \alpha + k2\pi = b - a + m2\pi$

hay $\qquad \alpha = b - a + h2\pi$, với $h = m - k$.

Từ đó suy ra $\qquad \cos\alpha = \cos(b-a) = \cos(a-b)$.

Tuy nhiên, vì trong chương trình không học hệ thức Sa-lơ nên giáo viên không chứng minh công thức này trên lớp.

Chứng minh ba công thức cuối như sau

$$\sin(a+b) = \sin[a-(-b)] =$$

$$= \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b)$$

$$= \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

$$\tan(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}.$$

Chia tử và mẫu cho $\cos a\cos b\neq 0$ (do điều kiện), ta được

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b},$$

$$\tan(a+b)=\tan[a-(-b)]=\frac{\tan a-\tan(-b)}{1+\tan a\tan(-b)}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

II – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

1. Công thức nhân đôi là trường hợp đặc biệt của các công thức cộng khi $a=b$. Một biến thể của công thức nhân đôi là công thức hạ bậc

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2},\quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Đây là những công thức hay sử dụng, đặc biệt là khi tính tích phân ở lớp 12.

2. Trong ví dụ áp dụng, khi cho $\sin a+\cos a=\frac{1}{2}$ thì ta tính ngay được $\sin 2a$.

Tuy nhiên nếu muốn tính $\cos 2a$ thì phải có thêm thông tin để xác định được dấu của $\cos 2a$.

III – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

1. Trong hoạt động **2**, để tiết kiệm thời gian, giáo viên có thể cho hai học sinh lên bảng viết bốn công thức $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$ rồi thực hiện phép cộng để có kết quả là các công thức biến đổi tích thành tổng.

2. Khi tính giá trị của các biểu thức trong ví dụ 1, về nguyên tắc học sinh có thể dùng máy tính bỏ túi để tính ra ngay giá trị gần đúng của chúng. Tuy nhiên, ở đây SGK trình bày cách sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng để tìm ra giá trị đúng dưới dạng căn thức.

3. Sau khi đã có công thức biến đổi tích thành tổng, học sinh có thể tự tìm ra công thức biến đổi tổng thành tích nếu được hướng dẫn cho các em cách đổi biến số. Vì vậy, hoạt động **3** nêu cách đổi biến số $u=a-b$, $v=a+b$

để từ vế phải của các công thức biến đổi tích thành tổng chuyển thành vế phải của các công thức biến đổi tổng thành tích, vấn đề còn lại là tính a và b theo u và v.

4. Để tránh đơn điệu, ngoài ví dụ 2 trình bày cách sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tính giá trị của biểu thức lượng giác, SGK còn nêu lên ví dụ 3 sử dụng công thức đó để chứng minh một hệ thức trong tam giác.

Giáo viên có thể chọn trình bày một trong hai ví dụ này và để học sinh tự đọc ví dụ kia.

C – HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

1. a) $\cos 225^{\circ} = \cos(180^{\circ} + 45^{\circ}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin 240^{\circ} = \sin(180^{\circ} + 60^{\circ}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cot(-15^{\circ}) = \cot(30^{\circ} - 45^{\circ}) = \dfrac{1}{\tan(30^{0} - 45^{0})} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$;

$\tan(75^{\circ}) = \tan(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}.$

b) $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$;

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$;

$\tan\dfrac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{12}\right) = \tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$

2. a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3} - 1\right).$

b) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan\alpha < 0,$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} = \frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

c) $0^o < a < 90^o \Rightarrow \cos a > 0,\ 90^o < b < 180^o \Rightarrow \cos b < 0.$

$$\cos a = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5},\ \cos b = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b = -\frac{3\sqrt{5}+8}{15}.$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b = -\frac{6+4\sqrt{5}}{15}.$$

3. a) $\sin(a+b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b) = \sin a\cos b$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right) + \frac{1}{2}\sin^2 a =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a - \sin a)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a + \sin a) + \frac{1}{2}\sin^2 a = \frac{1}{2}\cos^2 a.$$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right) - \sin(a-b) = \cos a\sin b.$

4. a) $\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\cos a\cos b + \sin a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}.$

Chia cả tử và mẫu cho sin$a$ sin$b$ ta được $\dfrac{\cot a\cot b + 1}{\cot a\cot b - 1}.$

b) $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$

$$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b$$

$$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\sin^2 b$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$= (1-\cos^2 a) - (1-\cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

c) Tương tự câu b).

5. a) $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -0{,}8.$

Vậy $\sin 2a = 0{,}96$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 0{,}28$; $\tan 2a \approx 3{,}43.$

b) $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0 \Rightarrow \sin a = \dfrac{12}{13}.$

Vậy $\sin 2a = -\dfrac{120}{169}$; $\cos 2a = -\dfrac{119}{169}$; $\tan 2a = \dfrac{120}{119}.$

c) $\sin 2a = -\dfrac{3}{4}$; $\cos 2a = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan 2a = -\dfrac{3}{\sqrt{7}}.$

6. $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0,\ \cos a < 0.$

Ta có $\quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = -\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin a + \cos a = \pm\frac{2}{3}.$$

a) Trường hợp $\sin a + \cos a = \dfrac{2}{3}$ ta có hệ

$$\begin{cases} \sin a + \cos a = \dfrac{2}{3} \\ \sin a.\cos a = -\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

suy ra $\sin a$ và $\cos a$ là nghiệm của phương trình $x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{18} = 0.$

Vì $\sin a > 0,\ \cos a < 0$ nên $\sin a = \dfrac{2 + \sqrt{14}}{6},\ \cos a = \dfrac{2 - \sqrt{14}}{6}.$

b) Trường hợp $\sin a + \cos a = -\dfrac{2}{3}$ ta có hệ

$$\begin{cases} \sin a + \cos a = -\dfrac{2}{3} \\ \sin a \cos a = -\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

suy ra $\sin a$ và $\cos a$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{18} = 0.$$

Vì $\sin a > 0,\ \cos a < 0$ nên $\sin a = \frac{\sqrt{14} - 2}{6},\ \cos a = -\frac{2 + \sqrt{14}}{6}$.

Đáp số : $\sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6},\ \cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$ hoặc

$$\sin a = \frac{\sqrt{14} - 2}{6},\ \cos a = -\frac{\sqrt{14} + 2}{6}.$$

7. a) $1 - \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Có thể biến đổi theo cách khác như sau

$$1 - \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin x = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

b) $1 + \sin x = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

Tương tự, ta cũng có thể biến đổi

$$1 + \sin x = \sin\frac{\pi}{2} + \sin x = 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\right).$$

c) $1 + 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right).$

d) $1 - 2\sin x = 2\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin x\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right).$

8. $A = \frac{(\sin x + \sin 5x) + \sin 3x}{(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x} = \frac{2\sin 3x\cos 2x + \sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x + \cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x.$