Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

(15 tiết)

CẤU TẠO CHƯƠNG

§1. Bất đẳng thức (2 tiết)

§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn (3 tiết)

§3. Dấu của nhị thức bậc nhất (2 tiết)

§4. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn (2 tiết)

§5. Dấu của tam thức bậc hai (4 tiết)

Ôn tập chương IV (1 tiết)

Kiểm tra chương IV (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Ôn tập, củng cố khái niệm bất đẳng thức trên cơ sở vận dụng các kiến thức về mệnh đề đã được học ở chương I. Hệ thống các tính chất của bất đẳng thức đã học ở lớp 8 và rèn luyện những kĩ năng cơ bản về chứng minh bất đẳng thức.

Cung cấp cho học sinh những khái niệm cơ bản về bất phương trình và một số phép biến đổi bất phương trình.

Giới thiệu cho học sinh phương pháp xét dấu một biểu thức trên cơ sở vận dụng định lí về dấu nhị thức bậc nhất và dấu tam thức bậc hai.

Cho học sinh thấy được khả năng ứng dụng bất đẳng thức và bất phương trình vào việc giải các bài toán thực tiễn (như tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hoặc ứng dụng việc biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào một số bài toán kinh tế...).

II – NỘI DUNG

Hai nội dung cơ bản của chương IV là bất đẳng thức và bất phương trình. Ở lớp 8 THCS, học sinh đã được làm quen với các khái niệm bất đẳng thức và bất phương trình. Lên lớp 9, học sinh tiếp tục được củng cố và hoàn thiện thêm một số kĩ năng chứng minh bất đẳng thức và giải một số bất phương trình bậc nhất cụ thể. Kế thừa điều này, trong chương IV Đại số 10 theo chương trình

GDTHPT môn Toán ta chỉ ôn tập và hệ thống lại các kiến thức về bất đẳng thức, giới thiệu các khái niệm bất phương trình một ẩn, nghiệm của bất phương trình, điều kiện của bất phương trình, giải bất phương trình và một số phép biến đổi bất phương trình. Thống nhất với tư tưởng xuyên suốt toàn bộ SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán, chúng tôi không trình bày các khái niệm, định lí dưới dạng hàn lâm mà chỉ giới thiệu một cách nhẹ nhàng thông qua các hoạt động hoặc ví dụ cụ thể để dẫn dắt học sinh tự nhận thức được các khái niệm và kết quả.

Một trong những phương pháp giải bất phương trình là sử dụng các phép biến đổi để đưa về xét dấu một tích, thương những nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai được giới thiệu trong §3 và §5.

Tập nghiệm của bất phương trình một ẩn là một tập con của tập số thực, còn tập nghiệm của bất phương trình hai ẩn là một *tập con của* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vì vậy chỉ yêu cầu học sinh biết cách biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Sau đây ta sẽ đi sâu vào từng nội dung của chương.

Nội dung thứ nhất : BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Một trong những đối tượng cơ bản của toán học là các tập hợp số. Trên các tập hợp số người ta xây dựng các phép toán và quan hệ thứ tự.

Tập số thực được phân hoạch thành tập số thực dương, tập số thực âm và số không. Tập số thực dương đóng kín đối với các phép cộng, nhân và chia. Từ đó ta có thể định nghĩa

a) $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực không âm (các số dương và số không).

b) $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+$.

Đặc biệt, $a \leq 0$ có nghĩa là $-a$ là số không âm. Theo định nghĩa này, có thể chứng minh quan hệ $a \leq b$ là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ (tức là có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu). Cũng xuất phát từ định nghĩa này có thể chứng minh được tất cả các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số

$$a \le b \Leftrightarrow ac \le bc \text{ (nếu } c > 0)$$

$$a \le b \Leftrightarrow ac \ge bc \text{ (nếu } c < 0).$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều

$$a \le b \text{ và } c \le d \Rightarrow a + c \le b + d.$$

Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều

$$a \le b \text{ và } c \le d \Rightarrow ac \le bd \text{ (nếu } a \ge 0,\ c \ge 0).$$

Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một luỹ thừa

$$a \le b \Rightarrow a^n \le b^n \text{ (nếu } a \ge 0,\ n \in \mathbb{Z}^+).$$

Khai căn hai vế một bất đẳng thức

$$a \le b \Rightarrow \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{b} \text{ (nếu } a \ge 0 \text{ và } n \in \mathbb{Z},\ n \ge 2).$$

Vì lí do sư phạm, để giảm bớt khó khăn cho học sinh và kế thừa các kiến thức mà học sinh đã được học ở THCS, chúng ta sử dụng "định nghĩa" bất đẳng thức của SGK lớp 8 (thừa nhận trên tập số thực có các quan hệ lớn hơn, bằng nhau, nhỏ hơn do đó khi so sánh hai số thực a và b chỉ xảy ra một trong ba khả năng sau : a nhỏ hơn b, a bằng b, a lớn hơn b và *kí hiệu* cho mỗi trường hợp là $a < b$, $a = b$, $a > b$ – trang 35 SGK Toán 8, tập một). Với cách "định nghĩa" như vậy không thể chứng minh các tính chất của bất đẳng thức (trong SGK Toán 8 chỉ có *minh hoạ hình học* mối liên hệ giữa thứ tự và các phép toán cộng, nhân).

Thực ra, quan hệ "$a < b$" không phải là quan hệ thứ tự (vì không có các tính chất phản xạ, phản xứng). Tuy nhiên, ngoài các tính chất phản xạ, phản xứng, quan hệ "$<$" cũng có tất cả các tính chất của quan hệ "$\le$". Vì lí do sư phạm, trong SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán chỉ trình bày các tính chất đó của bất đẳng thức ngặt và nhấn mạnh các bất đẳng thức không ngặt cũng có đủ các tính chất của bất đẳng thức ngặt.

2. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cô-si)

Theo quy định của chương trình, SGK Đại số 10 theo chương trình GDTHPT môn Toán chỉ trình bày bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm. Đây là một bất đẳng thức có rất nhiều ứng dụng trong đời sống và toán học. Phép chứng minh bất đẳng thức này là một ví dụ đơn giản và mẫu mực giúp học sinh hình thành phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Trước khi tiến hành chứng minh, giáo viên chỉ ra phương pháp chứng minh bất đẳng thức $A \leq B$ là xét dấu của hiệu $A - B$. Bất đẳng thức cần chứng minh đúng khi và chỉ khi $A - B \leq 0$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A - B = 0$ hay $A = B$.

3. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Mỗi số thực x được xác định bởi dấu và giá trị tuyệt đối của nó. Vì vậy, phép tính giá trị tuyệt đối có một vai trò quan trọng. Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số, có thể rút ra ngay các tính chất $|x| \geq 0$, $|x| \geq x$, $|x| \geq -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, giá trị tuyệt đối của một số x cũng là khoảng cách từ điểm biểu diễn số x trên trục số đến gốc O của trục số, do đó có ngay tính chất $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$ (với điều kiện $a > 0$).

Sau cùng, vì $|a - b|$ là khoảng cách giữa các điểm biểu diễn số a và số b trên trục số suy ra "bất đẳng thức tam giác" sau

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

Từ đó rút ra
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

và
$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Tuy nhiên, theo quy định của chương trình, chúng ta chỉ dừng lại ở mức giới thiệu các tính chất trên (mà không chứng minh) cho học sinh.

Nội dung thứ hai : BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến dạng $f(x) < g(x)$ (hoặc $f(x) \leq g(x)$), trong đó x là ẩn số, $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Nghiệm của bất phương trình là các giá trị của x làm cho mệnh đề chứa biến đã cho trở thành mệnh đề đúng. Một tập hợp bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung được gọi là hệ bất phương trình. Giải bất phương trình (hệ bất phương trình) là tìm tập nghiệm của nó. Để làm điều này ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Tuy nhiên, để có được bất phương trình, hệ bất phương trình tương đương ta phải áp dụng các phép biến đổi đòi hỏi kèm theo những điều kiện nhất định. Mặt khác, nhiều phép biến đổi đồng nhất làm thay đổi tập xác định của biểu thức, chẳng hạn phép thay thế $f(x) + g(x) - g(x)$ bởi $f(x)$ nói chung mở rộng tập xác định (và phép thay thế ngược lại dĩ nhiên có thể thu hẹp tập xác định). Cũng như vậy, các phép thay thế

$$\frac{f(x)}{g(x)} \, . \, g(x) = f(x)$$

$$\sqrt{f(x)} \, . \, \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x).g(x)}$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = f(x),...$$

đều làm mở rộng tập xác định và có thể dẫn đến xuất hiện nghiệm ngoại lai. Vì vậy, việc thực hiện các phép biến đổi đó thường đưa đến một hệ bất phương trình (gồm bất phương trình nhận được và điều kiện tương ứng) tương đương với bất phương trình đã cho. Chính lí do này đưa đến việc trình bày khái niệm hệ bất phương trình, hệ bất phương trình tương đương ngay sau khi xét khái niệm bất phương trình và khái niệm hai bất phương trình tương đương. Lưu ý rằng một bất phương trình tương đương với một hệ bất phương trình là trường hợp riêng của khái niệm hai hệ bất phương trình tương đương.

2. Dấu của nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai

Biết rằng mọi đa thức đều có thể phân tích thành tích của các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai vô nghiệm, vì vậy để xét dấu một đa thức chỉ cần biết cách xét dấu những nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai với biệt số âm. Các định lí về dấu của nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai trang bị cho học sinh một công cụ cơ bản để xét dấu một biểu thức và ứng dụng của nó là giải các bất phương trình.

III – YÊU CẦU

1. Về kiến thức

Nắm được khái niệm và các tính chất cơ bản của bất đẳng thức. Nắm vững bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm. Biết được một số bất đẳng thức cơ bản có chứa giá trị tuyệt đối. Hiểu được các khái niệm bất phương trình, hệ bất phương trình, nghiệm của bất phương trình, hệ bất phương trình (một hoặc hai ẩn). Biết khái niệm bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương, biến đổi tương đương bất phương trình (hệ bất phương trình). Hiểu, nhớ các định lí về dấu của nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai.

2. Về kĩ năng

Biết vận dụng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức, bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm để chứng minh một số bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức. Biết cách viết điều kiện của một bất phương trình. Biết cách nhận biết hai bất phương trình tương đương, biết vận dụng một số phép biến đổi tương đương bất phương trình để giải những bất phương trình cụ thể. Sử dụng thành thạo định lí về dấu nhị thức bậc nhất và dấu tam thức bậc hai để giải các bất phương trình bằng cách xét dấu một biểu thức. Có khả năng biểu diễn miền nghiệm của một số hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đơn giản.