

ÔN TẬP CUỐI NĂM (1 tiết)

I. Hướng dẫn trả lời câu hỏi

3. $x \in \left(\frac{2}{7}; \frac{2}{5}\right) \cup (5; 8)$.

4. $m > \frac{17}{8}$.

5. $3^{2000} > 2^{3000}$ vì $2^3 < 3^2 \Rightarrow (2^3)^{1000} < (3^2)^{1000}$.

II. Hướng dẫn giải bài tập ôn tập cuối năm

1. a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$ xác định với mọi x sao cho

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 4 \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 15 \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình trên ta được $3 \leq x \leq 5$ hay $A = [3; 5]$.

b) $A \setminus B = [3; 4]$, $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B) = (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$.

2. a) Với $m \neq 0$, phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta' = 1 + m(4m + 1) = 4m^2 + m + 1 > 0.$$

Vậy phương trình đó có hai nghiệm phân biệt.

b) Nếu -1 là một nghiệm của phương trình thì

$$m + 2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Khi đó phương trình là $x^2 - 6x - 7 = 0$. Nghiệm còn lại là $x_2 = 7$.

3. a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4m^2 - 9(m-1)^2 = (5m-3)(3-m) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq 3.$$

$$\text{b) } S = x_1 + x_2 = 4m \quad (1)$$

$$P = x_1 x_2 = 9(m-1)^2. \quad (2)$$

Từ (1) ta có $m = \frac{x_1 + x_2}{4}$, thế giá trị của m vào (2) ta có

$$x_1 x_2 = 9 \left(\frac{x_1 + x_2}{4} - 1 \right)^2.$$

Từ đó rút ra $9(x_1 + x_2 - 4)^2 - 16x_1 x_2 = 0$. Hệ thức này không phụ thuộc vào m .

c) Từ $x_2 - x_1 = 4$ suy ra

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 16m^2 - 36(m-1)^2 = 16$$

$$\text{hay } 5m^2 - 18m + 13 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{13}{5}.$$

4. a) Với $x > 1$ ta có

$$x^5 - 1 - 5(x-1) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 5) > 0$$

do đó $x^5 - 1 > 5(x-1)$.

$$5x^4(x-1) - (x^5 - 1) = (x-1)[4x^4 - (x^3 + x^2 + x + 1)] > 0$$

do đó $5x^4(x-1) > x^5 - 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) Vì } A &= x^5 + y^5 - x^4 y - xy^4 = x^5 - x^4 y + y^5 - xy^4 = \\ &= (x-y)(x^4 - y^4) = (x-y)^2(x+y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

nên $A \geq 0$ nếu $x + y \geq 0$.

c) Với $a \geq -\frac{1}{4}$, $b \geq -\frac{1}{4}$, $c \geq -\frac{1}{4}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} &< \\ &< \sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1}. \end{aligned}$$

Kết hợp với $a+b+c=1$, ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1} \\ &= (2a+1) + (2b+1) + (2c+1) = 2(a+b+c) + 3 = 5. \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$.

5. Đưa về hệ phương trình dạng tam giác

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 3x+5y-z=9 \\ 5x-2y-3z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ -4y-7z=6 \\ -17y-13z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ -4y-7z=6 \\ -67z=134. \end{cases}$$

Giải phương trình cuối ta được $z = -2$. Thay $z = -2$ vào phương trình thứ hai ta có

$$-4y + 14 = 6 \Leftrightarrow y = 2.$$

Thay $z = -2$, $y = 2$ vào phương trình đầu và giải ra ta được $x = -1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2. \end{cases}$

6. a) $f(x) = 2x(x+2) - (x+2)(x+1) = (x+2)(2x-x-1) = (x+2)(x-1)$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ với } \begin{cases} x < -2 \\ x > 1; \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \text{ với } -2 < x < 1.$$

b) Bảng biến thiên

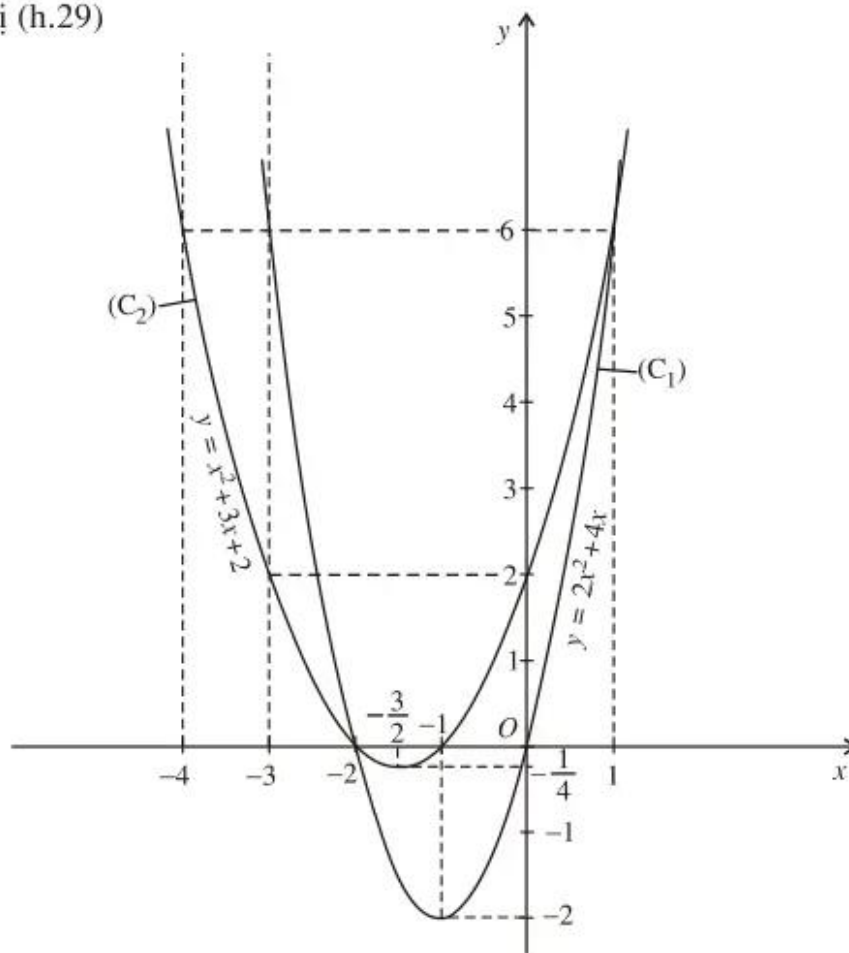
$$y = 2x(x+2) = 2x^2 + 4x$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

$$y = (x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Đồ thị (h.29)



Hình 29

Để tìm tọa độ của giao điểm A và B của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình

$$2x(x + 2) = (x + 2)(x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra hai giao điểm là $A(-2 ; 0)$, $B(1 ; 6)$.

c) Để đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua A và B ta phải có

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ c = 8 - 2b. \end{cases}$$

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có cực đại bằng 8 ta phải có

$$a < 0 \text{ và } \frac{-\Delta}{4a} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 8 \Leftrightarrow 4ac - b^2 = 32a.$$

Thay a và c tìm được ở trên vào đẳng thức cuối ta được

$$9b^2 - 16b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{16}{9}. \end{cases}$$

Suy ra với $b = 0$ thì $a = -2$; $c = 8$.

$$\text{Với } b = \frac{16}{9} \text{ thì } a = -\frac{2}{9}; c = \frac{40}{9}.$$

7. a) $\frac{1 - 2\sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{(\cos a + \sin a)^2} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a} = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}.$

b) $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \frac{2\sin 3a \cos 2a + \sin 3a}{2\cos 3a \cos 2a + \cos 3a} = \tan 3a.$

c) $\frac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} = \frac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^2 a}{4\sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{4\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2}}{4\sin^2 \frac{a}{2}}.$

$$= \cos^2 \frac{a}{2}.$$

d) $\frac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} = \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{\cos 2x \cdot \cos x} \cdot \frac{\cos 2x \cos x}{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}$

$$= \frac{\sin 2x \sin x}{\sin(2x - x)} = \sin 2x.$$

8. a)
$$\frac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a} = \frac{1 + 2 \sin 2a \cos 2a - 1 + 2 \sin^2 2a}{1 + 2 \cos^2 2a - 1 + 2 \sin 2a \cos 2a}$$

$$= \frac{2 \sin 2a (\cos 2a + \sin 2a)}{2 \cos 2a (\cos 2a + \sin 2a)} = \tan 2a.$$

b)
$$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} \tan^2 \frac{a}{2} - \cos^2 a = \frac{2 \cos^2 \frac{a}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2}} \tan^2 \frac{a}{2} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a.$$

c)
$$\frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x} = \frac{2 \sin 4x \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 4x \sin 2x + \sin 4x}$$

$$= \frac{\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) \sin 4x}{\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\right) \sin 4x} = \frac{\sin 2x - \sin 30^\circ}{\sin 2x + \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos(x + 15^\circ) \sin(x - 15^\circ)}{2 \sin(x + 15^\circ) \cos(x - 15^\circ)} = \tan(x - 15^\circ) \cot(x + 15^\circ).$$

9. a)
$$4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$$

$$= 4(2 \sin 54^\circ \sin 30^\circ - 2 \sin 30^\circ \sin 18^\circ)$$

$$= 4(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 8 \cos 36^\circ \sin 18^\circ$$

$$= \frac{8 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{4 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 72^\circ} = 2.$$

b)
$$96 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} = 48 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 24 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} = 12 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 6 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9.$$

c)
$$\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ =$$

$$= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4.
\end{aligned}$$

10. a) $A = \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \sin \frac{x}{5} A &= 2 \sin \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\
&= \sin \frac{2x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\
&= \frac{1}{4} \sin \frac{8x}{5} \cos \frac{8x}{5} = \frac{1}{8} \sin \frac{16x}{5}.
\end{aligned}$$

Suy ra $A = \frac{\sin \frac{16x}{5}}{16 \sin \frac{x}{5}}$.

b) $\sin \frac{x}{7} + 2 \sin \frac{3x}{7} + \sin \frac{5x}{7} = 2 \sin \frac{3x}{7} \cos \frac{2x}{7} + 2 \sin \frac{3x}{7}$

$$= 2 \sin \frac{3x}{7} \left(\cos \frac{2x}{7} + 1 \right) = 4 \sin \frac{3x}{7} \cos^2 \frac{x}{7}.$$

11. a) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Rightarrow -\tan C = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$$\Rightarrow \tan A \tan B \tan C - \tan C = \tan A + \tan B$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C$

$$= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C]$$

$$= 4 \sin C \cos \frac{A + C - B}{2} \cos \frac{A - B - C}{2}$$

$$= 4 \sin C \cos(90^\circ - B) \cos(A - 90^\circ)$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$\begin{aligned} 12. A &= \frac{\sin 40^\circ - \sin 45^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 45^\circ + \cos 50^\circ} - \frac{6(\sqrt{3} + 3 \tan 15^\circ)}{3 - \sqrt{3} \tan 15^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 45^\circ \cos 5^\circ - \sin 45^\circ}{2 \cos 45^\circ \cos 5^\circ - \cos 45^\circ} - \frac{6(\tan 30^\circ + \tan 15^\circ)}{1 - \tan 30^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan 45^\circ - 6 \tan 45^\circ = -5. \end{aligned}$$