CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4. Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ đó suy ra : Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Tính chất 6. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

II. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết :

1. Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng ;

2. Nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó ;

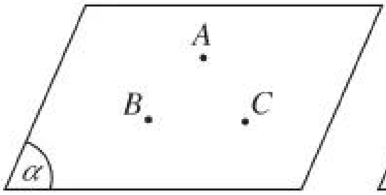
3. Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Kí hiệu

– (ABC) biểu thị mặt phẳng xác định bởi ba điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C (h.2.1).

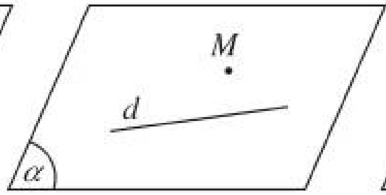
– (M, d) biểu thị mặt phẳng xác định bởi đường thẳng d và điểm M không nằm trên d (h.2.2).

– (d_1, d_2) biểu thị mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h.2.3).



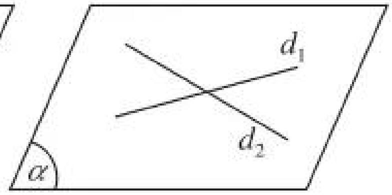
(ABC)

Hình 2.1



(M, d)

Hình 2.2



(d_1, d_2)

Hình 2.3

III. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và BCD được gọi là hình tứ diện, kí hiệu là $ABCD$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng.

2. Ví dụ

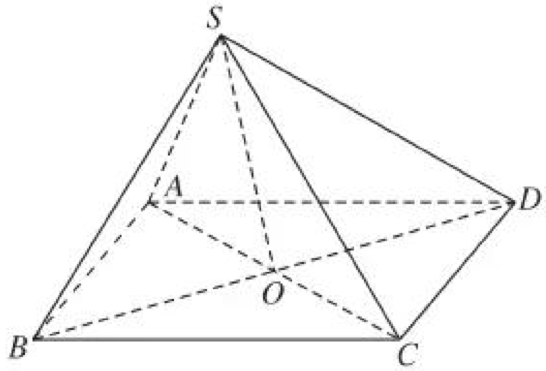
Ví dụ 1. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD (h.2.4). Ta có S và O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD) nên :

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO.



Hình 2.4

Ví dụ 2. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$ và $AB > CD$). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

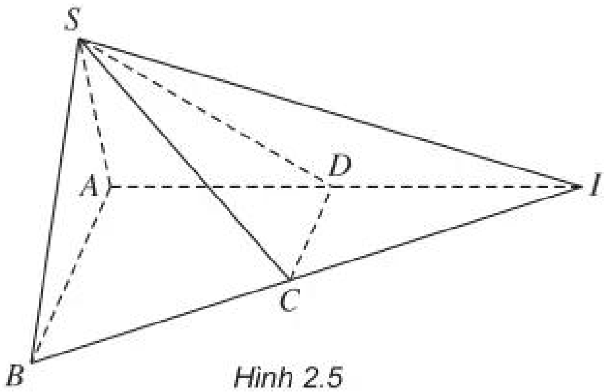
Giải

Gọi I là giao điểm AD và BC (h.2.5).

Ta có S và I là hai điểm chung của (SAD) và (SBC) nên

$(SAD) \cap (SBC) = SI$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SI.



Hình 2.5

VẤN ĐỀ 2

Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

1. Phương pháp giải

Trường hợp 1. Trong (α) có sẵn đường thẳng d' cắt d tại I.

Ta có ngay $d \cap (\alpha) = I$.

Trường hợp 2. Trong (α) không có sẵn d' cắt d. Khi đó ta thực hiện như sau :

– Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa d và (β) cắt (α) theo giao tuyến d',

– Gọi $I = d' \cap d$.

Ta có $d \cap (\alpha) = I$.

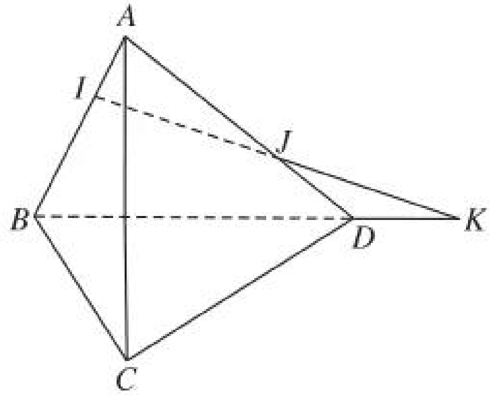
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{2}IB$ và $AJ = \frac{3}{2}JD$. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ với mặt phẳng (BCD).

Giải

Do $\begin{cases} AI = \frac{1}{2}IB \\ AJ = \frac{3}{2}JD \end{cases}$

nên IJ kéo dài sẽ cắt BD, gọi giao điểm là K (h.2.6). Ta có $K = IJ \cap (BCD)$.



Hình 2.6

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC và CD sao cho

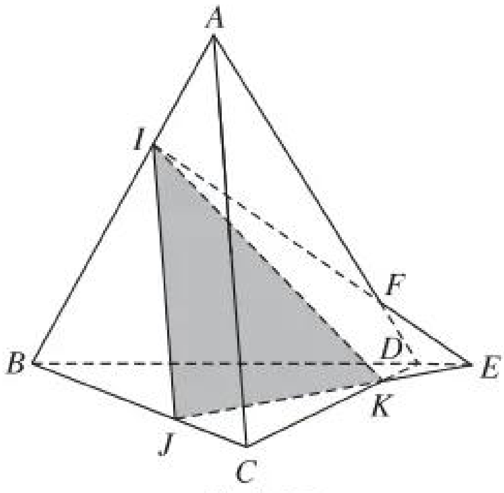
$AI = \frac{1}{3}AB$; $BJ = \frac{2}{3}BC$; $CK = \frac{4}{5}CD$.

Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với đường thẳng AD.

Giải

Gọi E là giao điểm của JK và BD, F là giao điểm của AD và IE (h.2.7).

Ta có $F = AD \cap (IJK)$.



Hình 2.7

VẤN ĐỀ 3

Chứng minh ba điểm thẳng hàng

1. Phương pháp giải

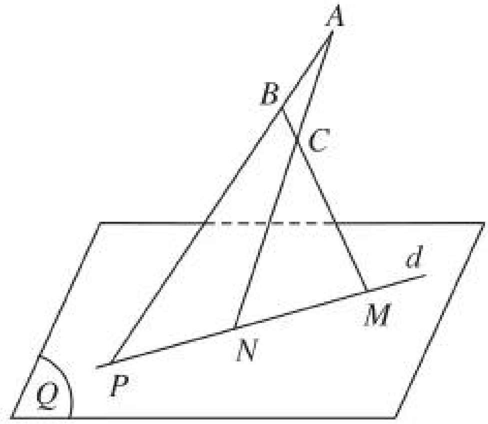
Nếu phải chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm ấy cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

2. *Ví dụ*

Ví dụ. Cho ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (Q) và các đường thẳng BC, CA, AB cắt (Q) lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải

Ta có M, N, P lần lượt thuộc về hai mặt phẳng (Q) và (ABC) nên M, N, P thuộc giao tuyến d của (Q) và (ABC) (h.2.8). Vậy M, N, P thẳng hàng.



Hình 2.8

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

a) Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

b) Lấy N là điểm thuộc miền trong của tam giác ABD sao cho JN cắt đoạn AB tại L. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNJ) và (ABC).

2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (SBM) và (SCD) ;

b) (ABM) và (SCD) ;

c) (ABM) và (SAC).

2.3. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy các điểm J, K lần lượt là điểm thuộc miền trong các tam giác BCD và ACD. Gọi L là giao điểm của JK với mặt phẳng (ABC).

a) Hãy xác định điểm L.

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

2.4. Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K thuộc đoạn BD (K không là trung điểm của BD). Tìm giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNK).

2.5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy M, N và P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, AB và BC sao cho chúng không trùng với trung điểm của các đoạn thẳng ấy. Tìm giao điểm (nếu có) của mặt phẳng (MNP) với các cạnh của hình chóp.

2.6. Cho hình chóp $S.ABCD$. M và N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

2.7. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.

Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

2.8. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến d. Trong (α) lấy hai điểm A và B sao cho AB cắt d tại I. O là một điểm nằm ngoài (α) và (β) sao cho OA và OB lần lượt cắt (β) tại A' và B'.

a) Chứng minh ba điểm I, A', B' thẳng hàng.

b) Trong (α) lấy điểm C sao cho A, B, C không thẳng hàng. Giả sử OC cắt (β) tại C', BC cắt $B'C'$ tại J, CA cắt $C'A'$ tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

2.9. Cho tứ diện $SABC$ có D, E lần lượt là trung điểm AC, BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) qua BC cắt SD và SA lần lượt tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN$, $J = BP \cap EQ$. Chứng minh bốn điểm S, I, J, G thẳng hàng.

b) Giả sử $AN \cap DM = K$, $BQ \cap EP = L$. Chứng minh ba điểm S, K, L thẳng hàng.