CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHÉP BIẾN HÌNH

Định nghĩa

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M′ của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Ta thường kí hiệu phép biến hình là F và viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$, khi đó điểm M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $\mathscr{H}' = F(\mathscr{H})$ là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc $\mathscr{H}$. Khi đó ta nói F biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$, hay hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F.

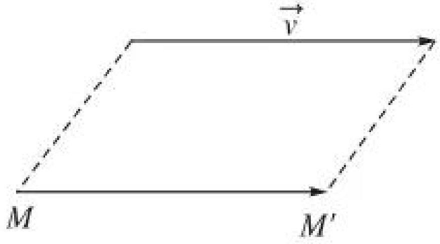
Để chứng minh hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F ta có thể chứng minh : Với điểm M tuỳ ý thuộc $\mathscr{H}$ thì $F(M) \in \mathscr{H}'$ và với mỗi M' thuộc $\mathscr{H}'$ thì có $M \in \mathscr{H}$ sao cho $F(M) = M'$.

Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là *phép đồng nhất*.

II. PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là *phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}$ (h.1.1).



Hình 1.1

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

Như vậy $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Nhận xét. Phép tịnh tiến theo vectơ - không chính là *phép đồng nhất*.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x\ ;\ y)$ và vectơ $\vec{v}(a\ ;\ b)$. Gọi điểm $M'(x'\ ;\ y') = T_{\vec{v}}(M)$.

Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$

IV. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Phép tịnh tiến

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho ;
3) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép tịnh tiến

1. Phương pháp giải

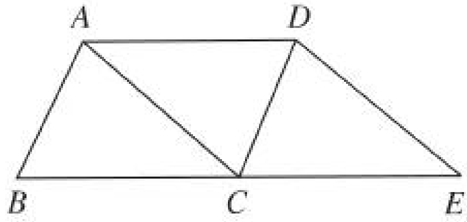
Dùng định nghĩa hoặc biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Giải

Vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ nên phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ biến điểm A thành điểm D, biến điểm B thành điểm C (h.1.2). Để tìm ảnh của điểm C ta dựng hình bình hành $ADEC$. Khi đó ảnh của điểm C là điểm E. Vậy ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ là tam giác DCE.



Hình 1.2

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (-2\ ;\ 3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x - 5y + 3 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1. Lấy một điểm thuộc d, chẳng hạn $M = (-1\ ;\ 0)$. Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-1 - 2\ ;\ 0 + 3) = (-3\ ;\ 3)$ thuộc d'. Vì d' song song với d nên phương trình của nó có dạng $3x - 5y + C = 0$. Do $M' \in d'$ nên $3(-3) - 5.\ 3 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 24$. Vậy phương trình của d' là $3x - 5y + 24 = 0$.

Cách 2. Từ biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ suy ra $x = x' + 2$, $y = y' - 3$. Thay vào phương trình của d ta được $3(x' + 2) - 5(y' - 3) + 3 = 0$, hay $3x' - 5y' + 24 = 0$. Vậy phương trình của d' là : $3x - 5y + 24 = 0$.

Cách 3. Ta cũng có thể lấy hai điểm phân biệt M, N trên d, tìm toạ độ các ảnh M', N' tương ứng của chúng qua $T_{\vec{v}}$. Khi đó d' là đường thẳng $M'N'$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2\ ;\ 3)$.

Giải

Cách 1. Dễ thấy (C) là đường tròn tâm $I(1\ ;\ -2)$, bán kính $r = 3$. Gọi $I' = T_{\vec{v}}(I) = (1-2\ ;\ -2+3) = (-1\ ;\ 1)$ và (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ thì (C') là đường tròn tâm I' bán kính $r = 3$. Do đó (C') có phương trình

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Cách 2. Biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3. \end{cases}$

Thay vào phương trình của (C) ta được

$$(x'+2)^2 + (y'-3)^2 - 2(x'+2) + 4(y'-3) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x'+1)^2 + (y'-1)^2 = 9.$$

Do đó (C') có phương trình : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$.

VẤN ĐỀ 2

Dùng phép tịnh tiến để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép tịnh tiến, hoặc xem điểm M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-1\ ;-1)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(2\ ;\ 3)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

Xem điểm $D(x\ ;\ y)$ là ảnh của điểm C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA} = (-4\ ;-2)$. Từ đó suy ra $x = 2 - 4 = -2\ ;\ y = 3 - 2 = 1$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d_1 cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó sao cho đường thẳng AB không song

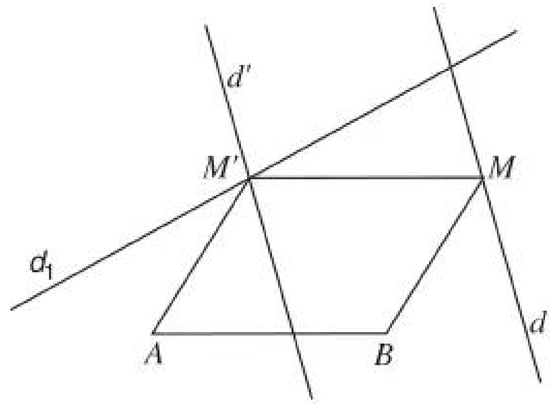
song hoặc trùng với d (hay d_1). Hãy tìm điểm M trên d và điểm M' trên d_1 để tứ giác $ABMM'$ là hình bình hành.

Giải

Xem điểm M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ (h.1.3). Khi đó điểm M' vừa thuộc d_1 vừa thuộc d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$. Từ đó suy ra cách dựng :

– Dựng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

– Dựng $M' = d_1 \cap d'$.



Hình 1.3

– Dựng điểm M là ảnh của điểm M' qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Dễ thấy tứ giác $ABMM'$ chính là hình bình hành thoả mãn yêu cầu của đầu bài.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép tịnh tiến để giải một số bài toán tìm tập hợp điểm

1. Phương pháp giải

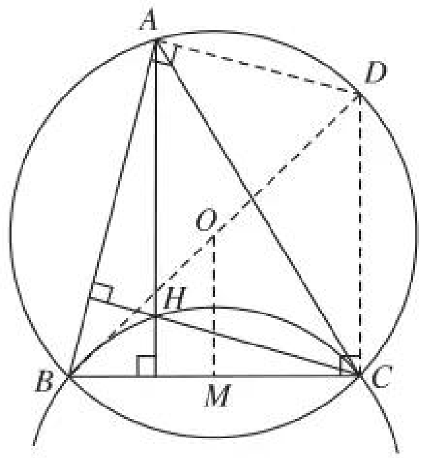
Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai điểm phân biệt B và C cố định trên đường tròn (O) tâm O, điểm A di động trên đường tròn (O). Chứng minh rằng khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn



Hình 1.4

ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Vì $\widehat{BCD} = 90^{o}$, nên DC // AH (h.1.4). Tương tự AD // CH. Do đó tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$. Ta thấy rằng $\overrightarrow{OM}$ không đổi, nên có thể xem H là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$. Do đó khi điểm A di động trên đường tròn (O) thì H di động trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (2\ ; -1)$, điểm $M = (3\ ; 2)$. Tìm toạ độ của các điểm A sao cho :

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$;

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$.

1.2. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{v} = (-2\ ; 1)$, đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 3 = 0$, đường thẳng d_1 có phương trình $2x - 3y - 5 = 0$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm toạ độ của $\vec{w}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{w}}$.

1.3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y - 9 = 0$. Tìm phép tịnh tiến theo vectơ có phương song song với trục Ox biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc toạ độ và viết phương trình đường thẳng d'.

1.4. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2\ ; 5)$.

1.5. Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O, bán kính r nằm về một phía của đường thẳng AB. Lấy điểm M trên (C), rồi dựng hình bình hành $ABMM'$. Tìm tập hợp các điểm M' khi M di động trên (C).