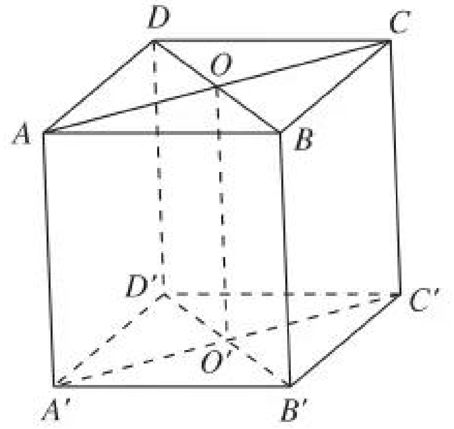
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

3.1. (h.3.43) a) • $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, v.v…



Hình 3.43

• $\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right)$

$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'}$, v.v...

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

(vì $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$) nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB}$.

3.2. (h.3.44) Giả sử bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình bình hành, ta có :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ (với điểm O bất kì)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$.

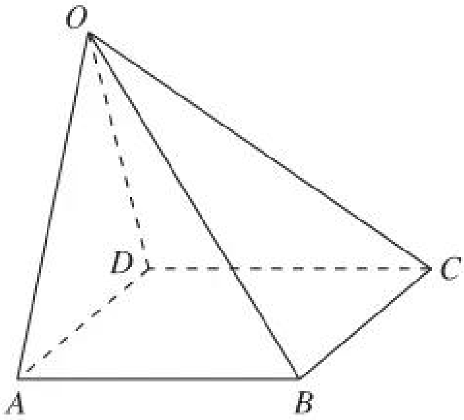
Ngược lại, giả sử ta có hệ thức :

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Vì A, B, C, D không thẳng hàng nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.



Hình 3.44

3.3. (h.3.45) Ta có

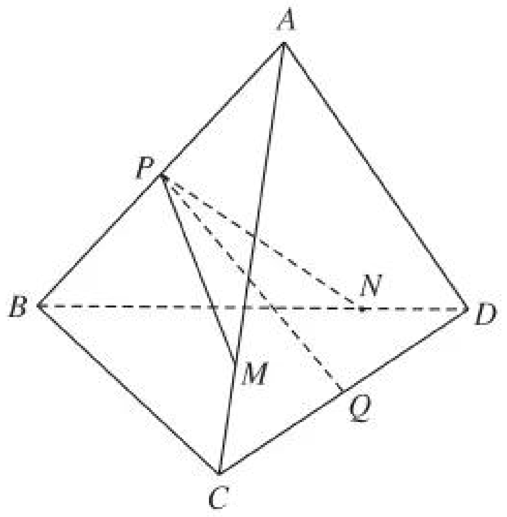
$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\underbrace{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}}_{\vec{0}})\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})$$

vì $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{BN}$.



Hình 3.45

Đồng thời $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN}$, nên

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \quad \text{vì } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}.$$

Vậy $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{PM} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{PN}$.

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ đồng phẳng.

3.4. (h.3.46) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP. Ta có :

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG'} \\ + & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG'} \\ & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PG'} \\ \hline \end{array}$$

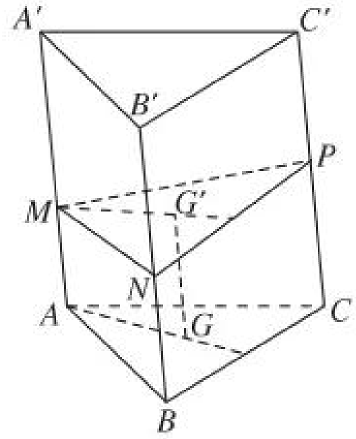
$$3\overrightarrow{GG'} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'}).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và G' là trọng tâm của tam giác MNP nên $\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'} = \vec{0}$.

Do đó : $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$

hay $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Vì điểm G cố định và $\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ là vectơ không đổi nên G' là điểm cố định. Vậy mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua điểm G' cố định.



Hình 3.46

3.5. (h.3.47) Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$.

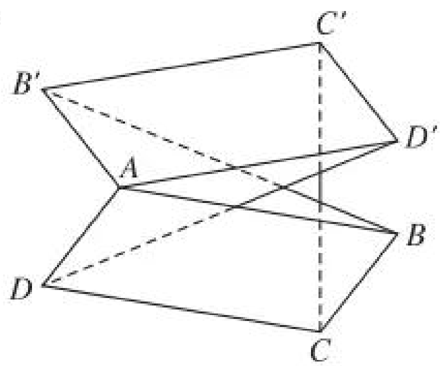
Do đó $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$.

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'}$

nên $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC'}$.

Vậy $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$.

Hệ thức $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$ biểu thị sự đồng phẳng của ba vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$.



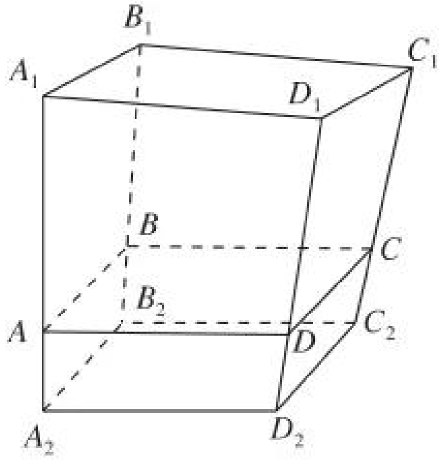
Hình 3.47

3.6. (h.3.48) Lấy điểm O cố định rồi đặt $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1$, $\overrightarrow{OD_1} = \vec{d}_1$.

Điều kiện cần và đủ để tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành là $\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_1 + \vec{d}_1$ (theo bài tập 3.2) (1).

Đặt $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{OC_2} = \vec{c}_2$, $\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{d_2}$. Điều kiện cần và đủ để tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ là hình bình hành là :

$$\vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{d_2} \qquad (2).$$



Hình 3.48

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Ta có $\dfrac{AA_1}{AA_2} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = -3\overrightarrow{AA_2}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = -3(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_1 - \vec{a} = -3(\vec{a}_2 - \vec{a})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2).$$

Tương tự : $\vec{b} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2})$, $\vec{c} = \dfrac{1}{4}(\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2)$, $\vec{d} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{d_1} + 3\overrightarrow{d_2})$.

Ta có $\vec{a} + \vec{c} = \dfrac{1}{4}(\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2) + \dfrac{1}{4}(\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2) = \dfrac{1}{4}(\vec{a}_1 + \vec{c}_1) + \dfrac{3}{4}(\vec{a}_2 + \vec{c}_2)$

và $\vec{b} + \vec{d} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2}) + \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{d_1} + 3\overrightarrow{d_2}) = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{d_1}) + \dfrac{3}{4}(\overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{d_2})$.

Từ (1) và (2) ta có $\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{d_1}$ và $\vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{d_2}$ nên suy ra :

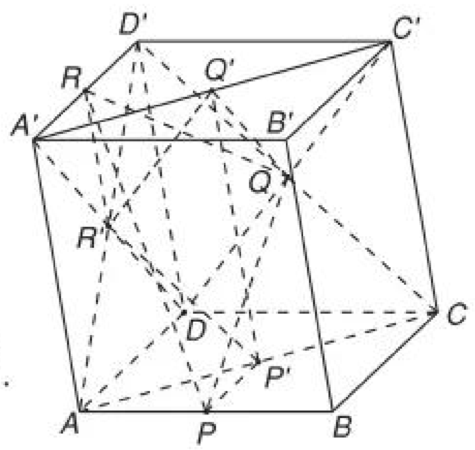
$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow$ tứ giác *ABCD* là hình bình hành.

3.7. (h.3.49) a) Ta có : $\overrightarrow{PP'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{QQ'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{RR'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$.

Vậy $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$.



Hình 3.49

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác PQR và $P'Q'R'$.

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

Do đó $(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P'}) + (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'Q'}) + (\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'R'}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{RG})}_{\vec{0}} + 3\overrightarrow{GG'} + \underbrace{(\overrightarrow{G'P'} + \overrightarrow{G'Q'} + \overrightarrow{G'R'})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G$ trùng với G'.

Vậy hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.