

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Vectơ, giá và độ dài của vectơ

- *Vectơ trong không gian* là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu \overrightarrow{AB} chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B . Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

- *Giá* của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vectơ có giá cắt nhau hoặc chéo nhau được gọi là hai vectơ *không cùng phương*. Hai vectơ cùng phương thì có thể *cùng hướng* hay *ngược hướng*.

- *Độ dài* của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là *vector đơn vị*. Ta kí hiệu độ dài của vectơ là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

2. Hai vectơ bằng nhau, vectơ - không

- Hai vectơ \vec{a} và \vec{b} được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Khi đó ta kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

- *Vector - không* là một vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là với mọi điểm A tùy ý ta có $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ và khi đó mọi đường thẳng đi qua điểm A đều chứa vectơ \overrightarrow{AA} . Do đó ta quy ước mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau, có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó ta viết $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ với mọi điểm A, B tùy ý.

II. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1. Định nghĩa

- Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ \overrightarrow{AC} được gọi là *tổng* của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , đồng thời được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Vectơ \vec{b} là vectơ đối của \vec{a} nếu $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ và \vec{a}, \vec{b} ngược hướng với nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2. Tính chất

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ $\vec{0}$)
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$.

3. Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

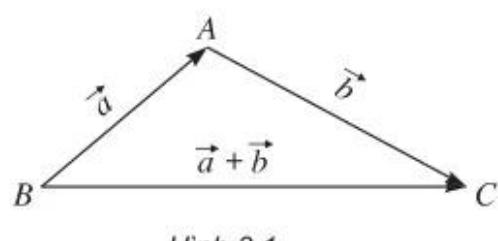
a) Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \quad (\text{h.3.1}).$$

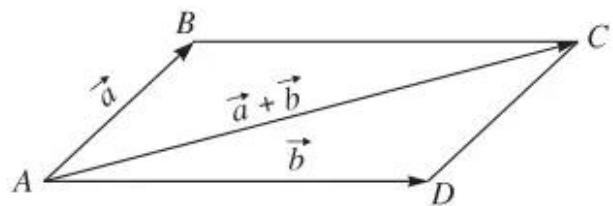


Hình 3.1

b) *Quy tắc hình bình hành*

Với hình bình hành $ABCD$ ta có :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ (h.3.2).}$$

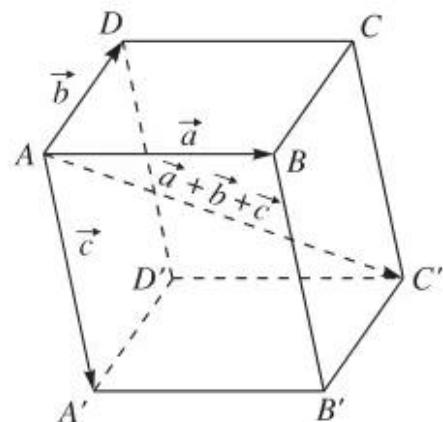


Hình 3.2

c) *Quy tắc hình hộp*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo (h.3.3), ta có :

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

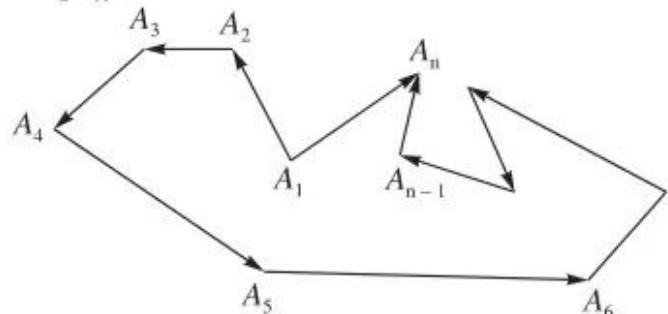


Hình 3.3

d) *Mở rộng quy tắc ba điểm*

Cho n điểm A_1, A_2, \dots, A_n bất kì (h.3.4),

$$\text{ta có : } \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$



Hình 3.4

III. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Định nghĩa. Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ \vec{a} với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với \vec{a} nếu $k > 0$, ngược hướng với \vec{a} nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

2. Tính chất. Với mọi vectơ \vec{a}, \vec{b} và mọi số m, n ta có :

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;
- $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$;
- $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

IV. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTO

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Cho ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đều khác $\vec{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp :

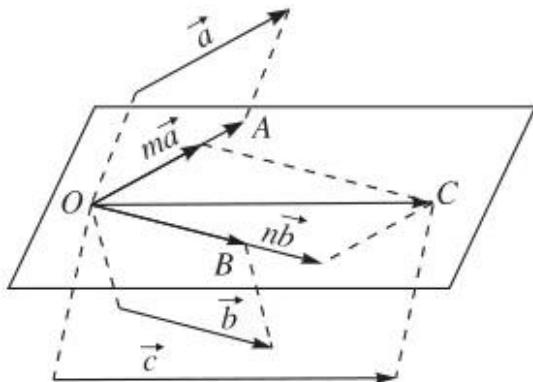
- Trường hợp các đường thẳng OA , OB , OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} không đồng phẳng.
- Trường hợp các đường thẳng OA , OB , OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng.

2. Định nghĩa

Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lí 1. Trong không gian cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} và một vectơ \vec{c} . Khi đó ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất (h.3.5).



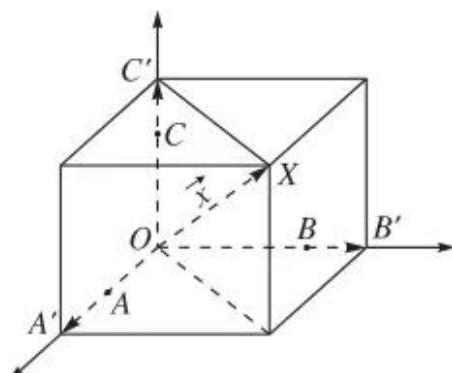
Hình 3.5

4. Phân tích (biểu thị) một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Định lí 2

Cho \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} là ba vectơ không đồng phẳng. Với mọi vectơ \vec{x} trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m , n , p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

Cụ thể $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (h.3.6)



Hình 3.6

và $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ với $\overrightarrow{OA'} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = n\vec{b}$, $\overrightarrow{OC'} = p\vec{c}$.

Khi đó : $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



VẤN ĐỀ 1

Xác định các yếu tố của vectơ

1. Phương pháp giải

- a) Dựa vào định nghĩa các yếu tố của vectơ ;
- b) Dựa vào các tính chất hình học của hình đã cho.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy nêu tên các vectơ bằng nhau có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ.

Giải

Theo tính chất của hình lăng trụ ta suy ra :

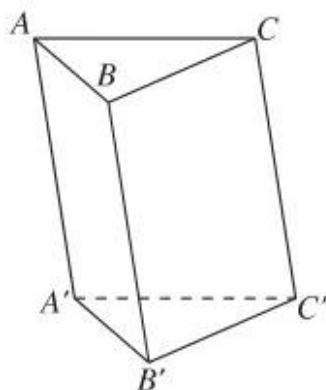
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C'A'}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{C'C}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{A'C'}$$

v.v... (h.3.7)



Hình 3.7

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp lần lượt bằng các vectơ \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{AA'}$ và \overrightarrow{AC} .

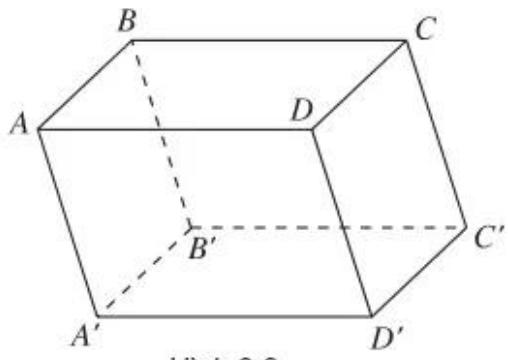
Giải

Theo tính chất của hình hộp (h.3.8) ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

Ta cũng có : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{C'D'}$
 $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{D'D}$
 $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{C'A'}, \text{ v.v...}$



Hình 3.8

Chứng minh các đẳng thức về vectơ

1. Phương pháp giải

- a) Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp để biến đổi vẽ này thành vẽ kia và ngược lại.
- b) Sử dụng các tính chất của các phép toán về vectơ và các tính chất hình học của hình đã cho.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

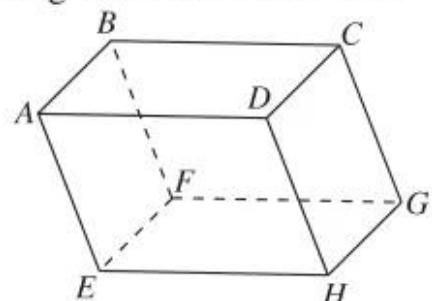
Giai

Theo tính chất của hình hộp :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}.$$

Dựa vào quy tắc hình hộp ta có thể viết ngay kết quả :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} \quad (\text{h.3.9}).$$



Hình 3.9

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

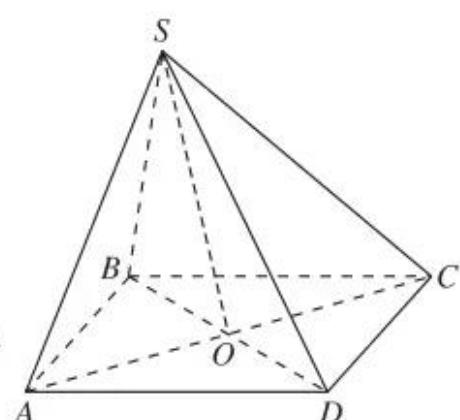
Giai

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD (h.3.10).

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \quad (1)$$

$$\text{và } \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.



Hình 3.10

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.

Giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$ (h.3.11).

Ta có : $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$.

$$\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}).$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ nên } \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2.$$

$$\text{Tương tự ta có : } \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2.$$

$$\text{Từ đó ta suy ra : } \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2.$$

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB . Trên đoạn thẳng AB ta lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng với điểm S bất kì ta luôn có :

$$\overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SB}.$$

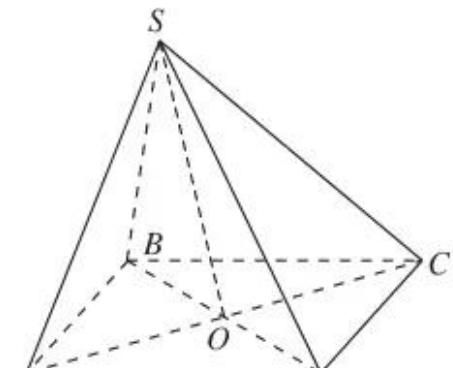
Giải

Theo giả thiết ta có $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ (h.3.12).

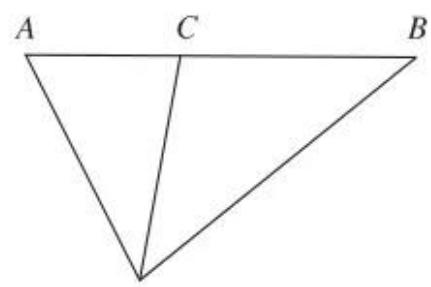
$$\text{Ta suy ra } \frac{AC}{AC+CB} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow AC = (AC + CB) \frac{m}{m+n} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}.$$

Vì ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$ nên :



Hình 3.11



Hình 3.12

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} &= \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \Rightarrow \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} - \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SB}.\end{aligned}$$



VẤN ĐỀ 3

Chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

1. Phương pháp giải

- a) Dựa vào định nghĩa : Chứng tỏ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng.
- b) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng \Leftrightarrow có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, trong đó \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ không cùng phương.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Giai

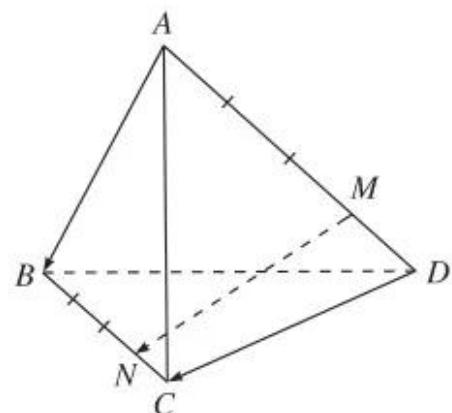
Theo giả thiết $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MD}$

và $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$ (h.3.13).

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

$$\text{và } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN} \quad (2)$$



Hình 3.13

Cộng đẳng thức (1) và (2) với nhau về theo vế, ta có

$$4\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD}}_0 + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN}}_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABFE$ và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $BCGF$. Chứng minh rằng ba vectơ \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{IK} , \overrightarrow{GF} đồng phẳng.

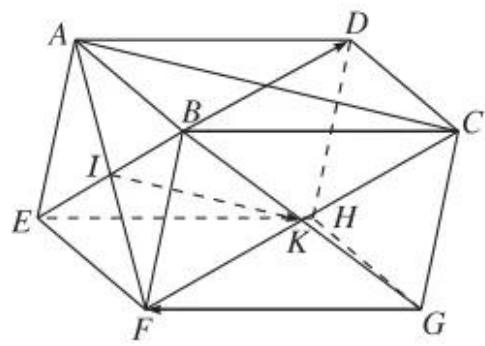
Giai

Vectơ \overrightarrow{BD} có giá thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vectơ \overrightarrow{IK} có giá song song với đường thẳng AC thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vectơ \overrightarrow{GF} có giá song song với đường thẳng BC thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy ba vectơ \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{IK} , \overrightarrow{GF} đồng phẳng (h.3.14).

Cách khác.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{GF} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= -\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}). \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$. Hệ thức này chứng tỏ rằng ba vectơ \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{GF} , \overrightarrow{IK} đồng phẳng.



Hình 3.14

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

- 3.1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
- Hãy biểu diễn các vectơ \overrightarrow{AO} , $\overrightarrow{AO'}$ theo các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương đã cho.
 - Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB}$.
- 3.2.** Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D phân biệt và không thẳng hàng. Chứng minh rằng điều kiện cân và đủ để bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình bình hành là :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

- 3.3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Trên các cạnh AC và BD ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k \ (k > 0).$$

Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng.

- 3.4.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng a . Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $AM + BN + CP = a$.

Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

- 3.5.** Trong không gian cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chỉ có chung nhau một điểm A . Chứng minh rằng các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

- 3.6.** Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Về một phía đối với mặt phẳng (α) ta dựng hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$. Trên các đoạn $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ ta lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = \frac{DD_1}{DD_2} = 3.$$

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- 3.7.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A'D'$. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm đối xứng của các hình bình hành $ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Chứng minh hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có trọng tâm trùng nhau.