§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

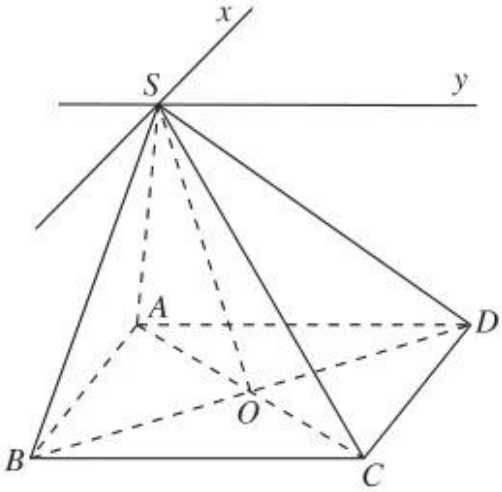
2.10. (h.2.28) a).

Ta có : $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$.

Giả sử : $AC \cap BD = O \Rightarrow \begin{cases} O \in (SAC) \\ O \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.



Hình 2.28

b) Ta có : $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Ta lại có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ và $Sx // AB // CD$.

c) Lập luận tương tự câu b) ta có $(SAD) \cap (SBC) = Sy$ và $Sy // AD // BC$.

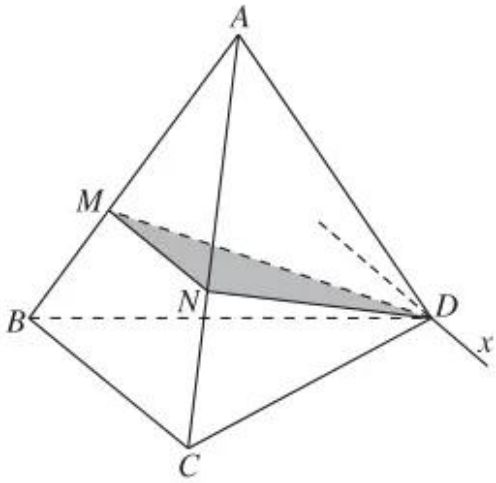
2.11. (h.2.29) $\begin{cases} M \in AB \\ N \in AC \end{cases} \Rightarrow MN \subset (ABC)$.

Trong tam giác ABC ta có :

$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow MN // BC$.

Hiển nhiên $D \in (DBC) \cap (DMN)$

$\begin{cases} BC \subset (DBC) \\ MN \subset (DMN) \\ BC // MN \end{cases}$



Hình 2.29

$\Rightarrow (DBC) \cap (DMN) = Dx$ và $Dx // BC // MN$.

2.12. (h.2.30) a) $\begin{cases} M \in (MIJ) \\ M \in AD \Rightarrow M \in (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MIJ) \cap (ABD)$

Ta cũng có : $\begin{cases} IJ \,//\, AB \\ IJ \subset (MIJ) \\ AB \subset (ABD). \end{cases}$

$\Rightarrow (MIJ) \cap (ABD) = d = Mt$

và $Mt \,//\, AB \,//\, IJ$.

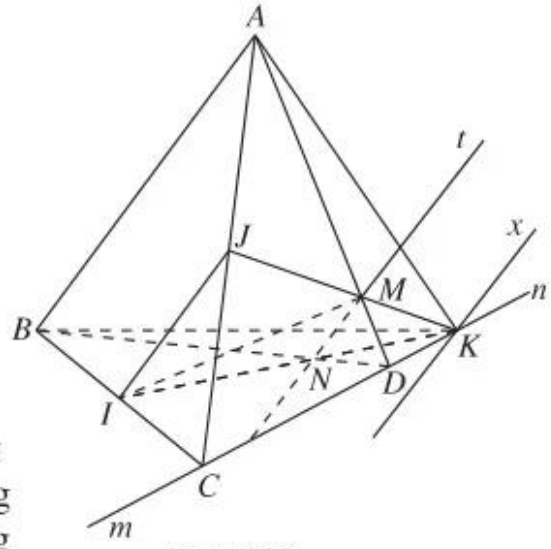
b) Ta có $Mt \,//\, AB \Rightarrow Mt \cap BD = N$

$IN \cap JM = K \Rightarrow \begin{cases} K \in IN \\ K \in JM. \end{cases}$

Vì $K \in IN \Rightarrow K \in (BCD)$

và $K \in JM \Rightarrow K \in (ACD)$.

Mặt khác $(BCD) \cap (ACD) = CD$ do đó $K \in CD$. Do vậy K nằm trên hai nửa đường thẳng Cm và Dn thuộc đường thẳng CD. (Để ý rằng nếu M là trung điểm của AD thì sẽ không có điểm K.)



Hình 2.30

c) Ta có : $\begin{cases} K \in (ABK) \\ K \in IN \Rightarrow K \in (MIJ) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABK) \cap (MIJ)$

mà $\begin{cases} AB \subset (ABK) \\ IJ \subset (MIJ) \\ AB \,//\, IJ \end{cases} \Rightarrow (ABK) \cap (MIJ) = Kx$ và $Kx \,//\, AB \,//\, IJ$.

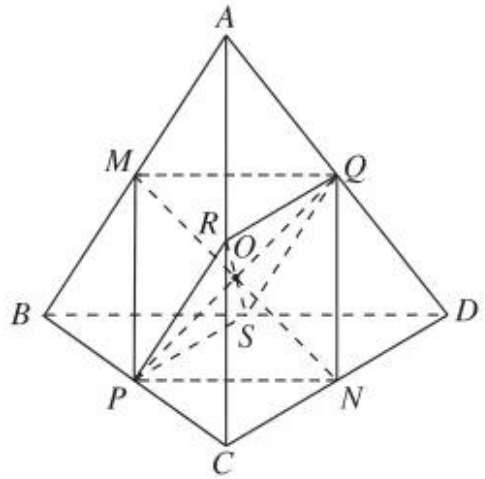
2.13. (h.2.31) Trong tam giác ABC ta có :

$MP \,//\, AC$ và $MP = \dfrac{AC}{2}$.

Trong tam giác ACD ta có :

$QN \,//\, AC$ và $QN = \dfrac{AC}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} MP \,//\, QN \\ MP = QN \end{cases}$



Hình 2.31

$\Rightarrow$ tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

Do vậy hai đường chéo MN và PQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Tương tự : $PR \parallel QS$ và $PR = QS = \dfrac{AB}{2}$. Do đó tứ giác $PRQS$ là hình bình hành.

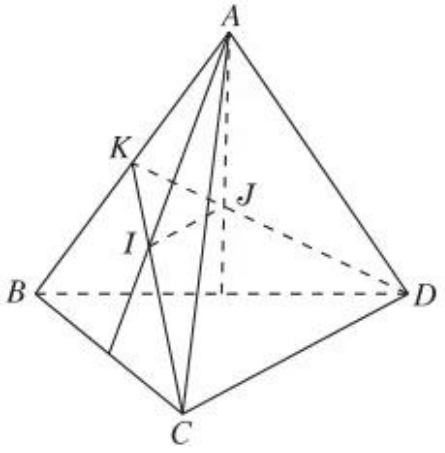
Suy ra hai đường chéo RS và PQ cắt nhau tại trung điểm O của PQ và $OR = OS$.

Vậy ba đoạn thẳng MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

2.14. (h.2.32) Gọi K trung điểm của AB.

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên $I \in KC$ và vì J là trọng tâm của tam giác ABD nên $J \in KD$.

Từ đó suy ra $\dfrac{KI}{KC} = \dfrac{KJ}{KD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD$.



Hình 2.32

2.15. (h.2.33) a).

Ta có : $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.

Vậy $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (IBC) = PQ$

và $PQ \parallel AD \parallel BC$. (1)

Tương tự : $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (JAD)$.

Vậy $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (JAD) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (JAD) \cap (SBC) = MN$

và $MN \parallel BC \parallel AD$. (2)

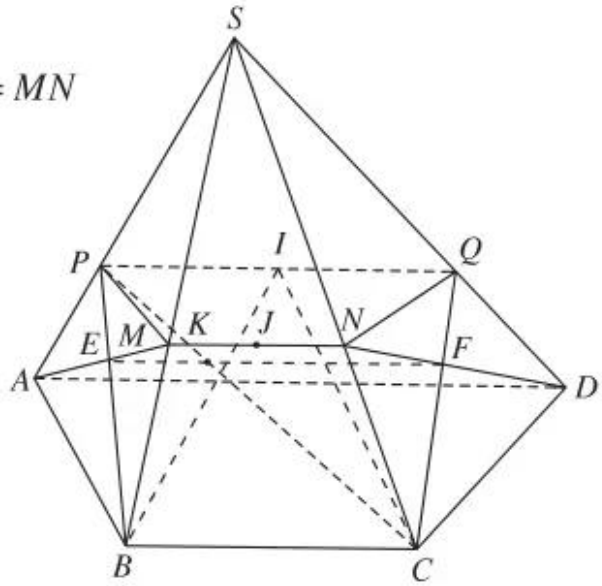
Từ (1) và (2) suy ra $PQ \parallel MN$.

b) Ta có :

$E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases}$

$F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ). \end{cases}$

Do đó : $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$.



Hình 2.33

Mà $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ MN \,//\, PQ \end{cases}$ suy ra $EF \,//\, AD \,//\, BC \,//\, MN \,//\, PQ$.

Tính EF : $CP \cap EF = K \Rightarrow EF = EK + KF$

$$EK \,//\, BC \Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} \qquad (*)$$

$$PM \,//\, AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB}.$$

Mà $\frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$ suy ra $\frac{PE}{EB} = \frac{2}{3}$.

Từ (*) suy ra $\frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE + EB} = \frac{1}{1 + \frac{EB}{PE}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{5}b.$

Tương tự ta tính được $KF = \frac{2}{5}a$.

Vậy : $EF = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b = \frac{2}{5}(a + b)$.