§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có hai trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b :

Trường hợp 1 : Có một mặt phẳng chứa a và b.

Xảy ra ba khả năng sau :

1. a và b cắt nhau tại điểm M, ta kí hiệu $a \cap b = M$;
2. a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a \,//\, b$ hoặc $b \,//\, a$;
3. a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.

Trường hợp 2 : Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b : khi đó ta nói a và b chéo nhau.

II. CÁC ĐỊNH LÍ VÀ TÍNH CHẤT

1. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

2. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau. (Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.)

3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

4. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (dùng quan hệ song song)

1. Phương pháp giải

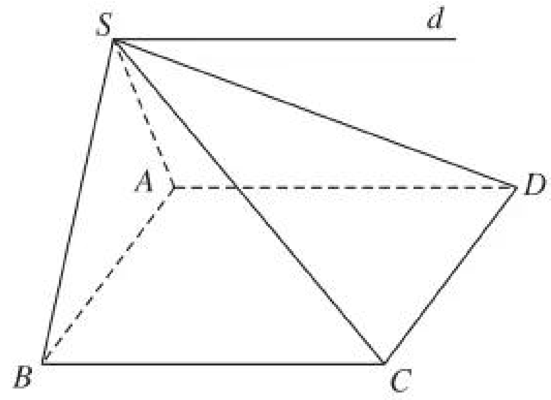
Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song d và d' thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Δ đi qua S và song song với d và d'.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình bình hành $ABCD$ và S là điểm không thuộc mặt phẳng của hình bình hành. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Giải

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song AD và BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AD và BC (h.2.9).



Hình 2.9

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng song song

1. Phương pháp giải

a) Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng.

b) Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

c) Dùng tính chất : Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng ấy.

d) Dùng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

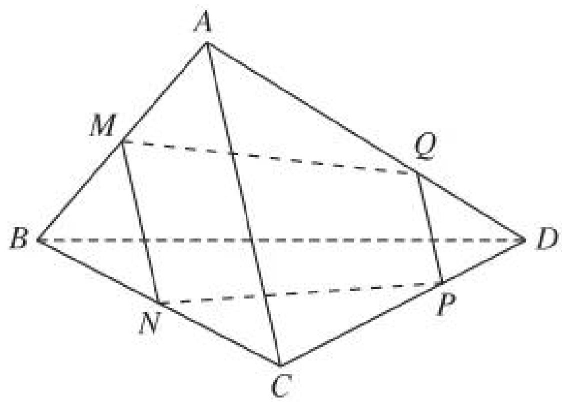
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC ; Q là một điểm nằm trên cạnh AD và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ). Chứng minh rằng PQ // MN và PQ // AC.

Giải

Ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (MNQ) lần lượt cắt nhau theo các giao tuyến AC, MN và PQ.

Vì MN // AC (tính chất đường trung bình của tam giác), nên PQ // MN // AC (theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng) (h.2.10).



Hình 2.10

VẤN ĐỀ 3

Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp giải

Ta thường dùng phương pháp phản chứng như sau :

Giả sử hai đường thẳng đã cho cùng nằm trong một mặt phẳng rồi rút ra điều mâu thuẫn.

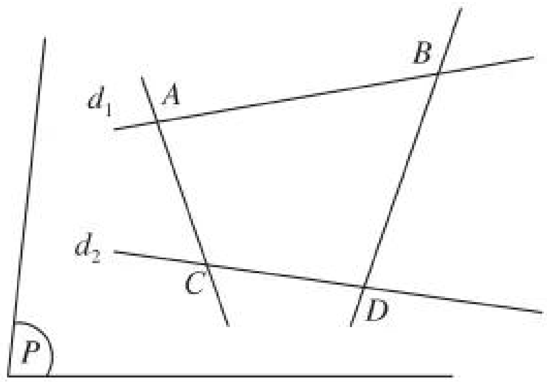
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho d_1, d_2 là hai đường thẳng chéo nhau. Trên d_1, lấy hai điểm phân biệt A và B ; trên d_2 lấy hai điểm phân biệt C và D. Chứng minh rằng AC và BD chéo nhau.

Giải

Giả sử AC và BD không chéo nhau.

Như vậy có một mặt phẳng (P) chứa cả d_1 và d_2. Khi đó ta có d_1 và d_2 cùng nằm trên (P). Điều này mâu thuẫn với giả thiết d_1 và d_2 chéo nhau. Vậy AC và BD chéo nhau (h.2.11).



Hình 2.11

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây :

a) (SAC) và (SBD) ; b) (SAB) và (SCD) ; c) (SAD) và (SBC).

2.11. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}\cdot$ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

2.12. Cho tứ diện $ABCD$. Cho I và J tương ứng là trung điểm của BC và AC, M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AD.

a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).

b) Gọi N là giao điểm của BD với giao tuyến d, K là giao điểm của IN và JM. Tìm tập hợp điểm K khi M di động trên đoạn AD (M không là trung điểm của AD).

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABK) và (MIJ).

2.13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC và BD. Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

2.14. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

2.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy là AD và BC. Biết $AD = a$, $BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Giả sử AM cắt BP tại E ; CQ cắt DN tại F. Chứng minh rằng EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a và b.