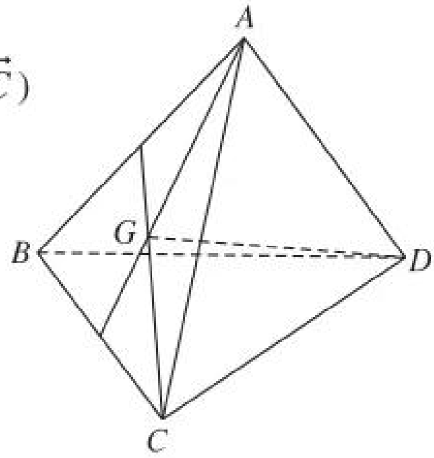
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

3.8. (h.3.50) Ta có :

$$\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$= \overrightarrow{GD}.\vec{0} = 0$$

(Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$).



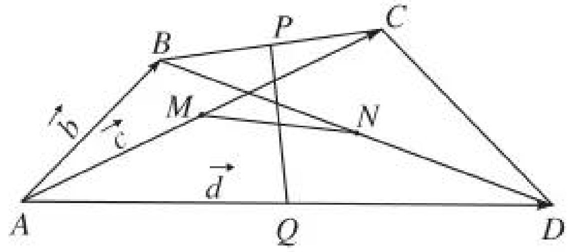
Hình 3.50

3.9. (h.3.51) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Ta có :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}-\vec{c})$.



Hình 3.51

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AP}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}).$$

Theo giả thiết ta có $MN = PQ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{QP}^2$.

$$(\vec{b}+\vec{d}-\vec{c})^2 = (\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})^2 \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{d}-\vec{b}.\vec{c}-\vec{d}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d}-\vec{c}.\vec{d}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{b}.\vec{d}-2\vec{b}.\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}.(\vec{d}-\vec{c})=0$$

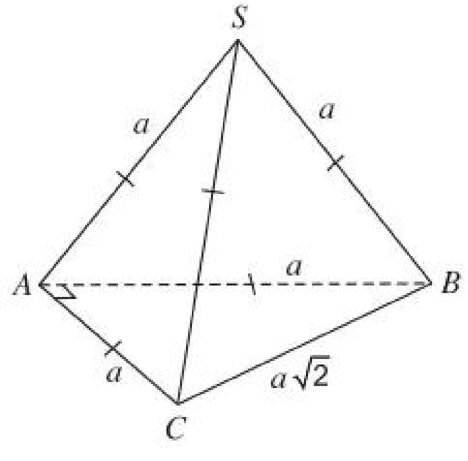
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

3.10. (h.3.52) Ta tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$. Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC})\,.\,\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}.$$

Theo giả thiết ta suy ra hình chóp có các tam giác đều là SAB, SAC và các tam giác vuông là ABC vuông tại A và SBC vuông tại S.



Hình 3.52

Do đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = a.\,a.\cos 120^{\circ} = -\dfrac{a^2}{2}$

và $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$.

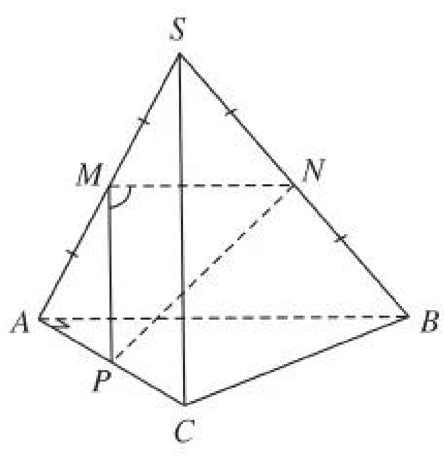
$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = \frac{-\dfrac{a^2}{2}+0}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

hay $(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = 120^{\circ}$.

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ bằng 120°.

3.11. (h. 3.53) *Cách thứ nhất*

Dễ thấy tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0$ và tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}) = 120^{\circ}$.



Hình 3.53

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos 120^{\circ} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.

Cách thứ hai

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính $\widehat{NMP}$.

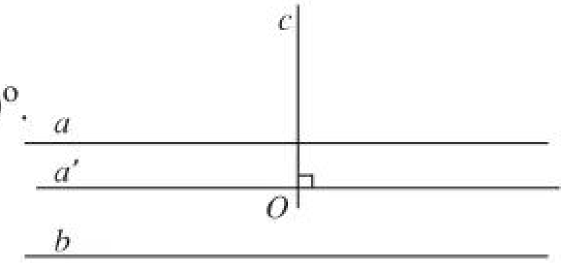
Ta có $NB = MP = \frac{a}{2}$, $SP^2 = \frac{3a^2}{4}$, $BP^2 = \frac{5a^2}{4}$;

$$BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2} \Rightarrow NP^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Mặt khác $NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\widehat{NMP}$

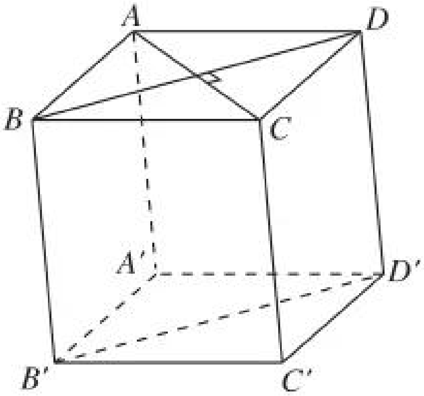
$$\Rightarrow \cos\widehat{NMP} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^{\circ}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.



Hình 3.54

3.12. (h.3.54) Giả sử $a \parallel b$ và $c \perp a$. Lấy điểm O bất kì trên c, kẻ $a' \parallel a$ qua O suy ra $\widehat{cOa'} = 90^{\circ}$. Dễ thấy $a' \parallel b$ nên $\widehat{cOa'}$ chính là góc giữa hai đường thẳng c và b, do đó $c \perp b$.



Hình 3.55

3.13. (h.3.55) Từ giả thiết suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó $AC \perp BD$.

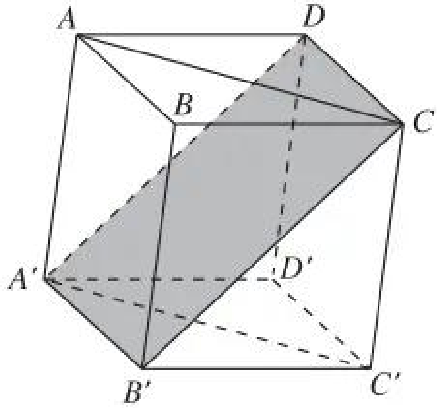
Dễ thấy mặt chéo $BDD'B'$ của hình hộp đã cho là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$. Từ đó, theo bài 3.12 suy ra $AC \perp B'D'$.

3.14. (h.3.56) Trước hết ta dễ thấy tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành, ngoài ra $B'C = a = CD$ nên nó là hình thoi. Ta chứng minh hình thoi $A'B'CD$ là hình vuông. Thật vậy, ta có :

$$\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Vậy tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.



Hình 3.56

3.15. (h.3.57) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$; (1)

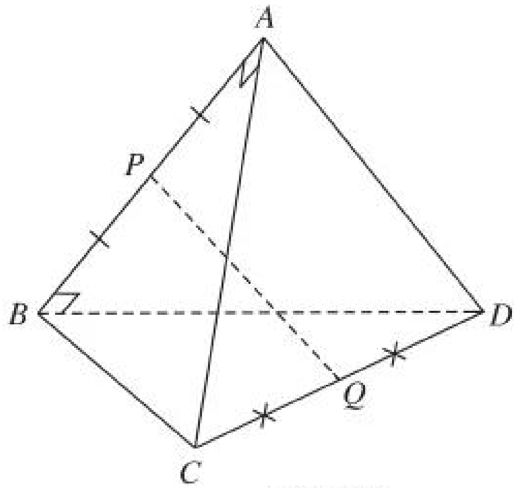
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}.$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta có

$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Suy ra $2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

hay $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$, tức là $PQ \perp AB$.



Hình 3.57