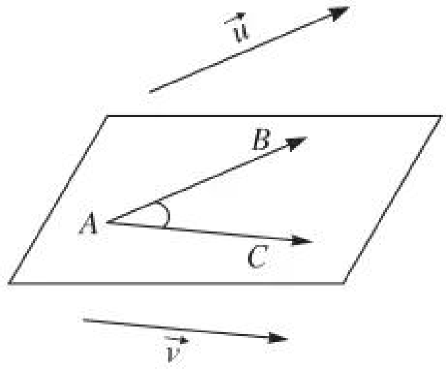
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^{\circ} \leq \widehat{BAC} \leq 180^{\circ}$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$. Ta có : $(\vec{u},\vec{v})=\widehat{BAC}$ (h. 3.15).



Hình 3.15

2. Tích vô hướng

Trong không gian, tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số được kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$ xác định bởi :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$$

Nếu $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$.

3. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì trong không gian và với mọi số k ta có :

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ) ;
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.k\vec{b}$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

4. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

- Nếu $\vec{a}$ là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.
- Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của d.

5. Một số ứng dụng của tích vô hướng

- Tính độ dài của đoạn thẳng AB : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.
- Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ theo công thức :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}.$$

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm bất kì lần lượt song song với a và b.

III. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- Hai đường thẳng a và b được gọi là *vuông góc với nhau* nếu góc giữa chúng bằng 90^o. Ta kí hiệu $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Nếu $a \,//\, b$ và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Ứng dụng của tích vô hướng

1. Phương pháp giải

a) Muốn tính độ dài của đoạn thẳng AB hoặc tính khoảng cách giữa hai điểm A và B ta dựa vào công thức : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

b) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta dựa vào công thức : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

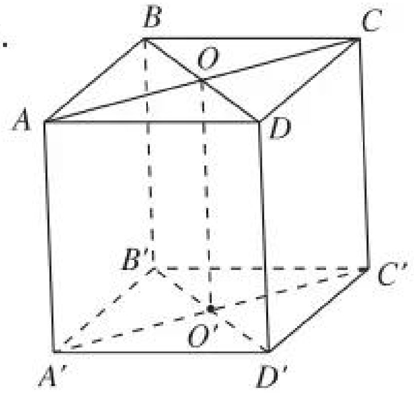
c) Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và S là một điểm sao cho :

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$.

Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm O và S theo a.



Hình 3.16

Giải

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

và $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OO'}$; $\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OO'}$

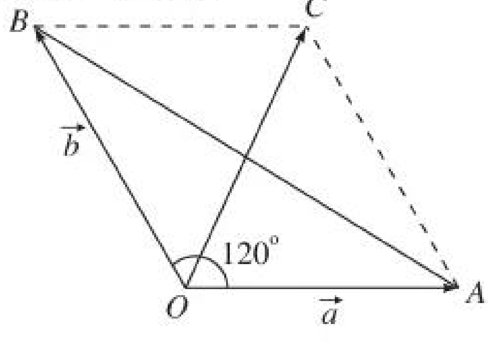
với O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ (h.3.16).

Do đó : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}$

$= 4\overrightarrow{OO'}$ mà $|\overrightarrow{OO'}| = a$.

Vậy $|\overrightarrow{OS}| = 4a$.

Ví dụ 2. Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°. Hãy tìm $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $|\vec{a}-\vec{b}|$ biết rằng $|\vec{a}| = 3$ cm và $|\vec{b}| = 5$ cm.



Hình 3.17

Giải

Từ một điểm O trong không gian dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ với $\widehat{AOB} = 120^\circ$ (h.3.17).

Sau đó ta dựng hình bình hành $OACB$.

Ta có $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.

- Xét tam giác OAC ta có $\widehat{OAC} = 60^\circ$

và $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC\cos 60^o = 9 + 25 - 2.3.5\cdot\dfrac{1}{2} = 19.$

Vậy $|\overrightarrow{OC}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = 19.$

Do đó $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$ (cm).

• Xét tam giác OAB ta có : $BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\cos 120^o$

$$= 9 + 25 - 2.3.5\cdot(-\frac{1}{2}) = 49.$$

Vậy $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 49.$

Do đó $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$ (cm).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều.

a) Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, BD, DA. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}.$

Đặt $AB = a$ ta có $AD = AB = AC = a$ (h.3.18).

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AB}|\cos 60^o - |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|.\cos 60^o$

$$= a.a\cdot\frac{1}{2} - a.a\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

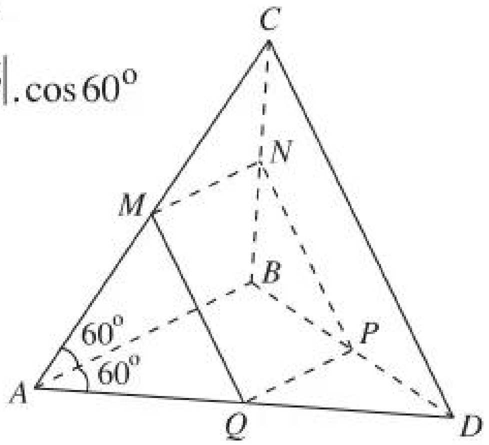
Vậy $CD \perp AB$.

b) Ta có $MN \,//\, PQ \,//\, AB$

và $MN = PQ = \dfrac{AB}{2}$

nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Vì $MN \,//\, AB$ và $NP \,//\, CD$ mà $AB \perp CD$ nên hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Hình 3.18

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

1. Phương pháp giải

– Cần khai thác các tính chất về quan hệ vuông góc đã biết trong hình học phẳng.

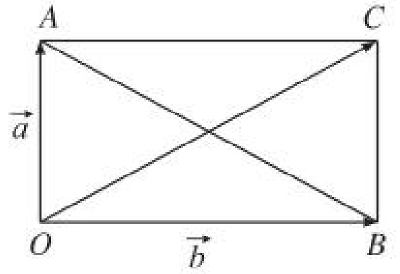
– Sử dụng trực tiếp định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.

– Muốn chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Chứng minh rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Giải



Hình 3.19

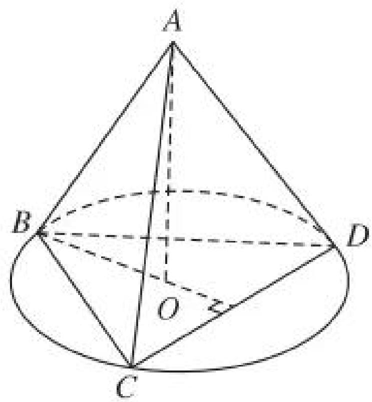
Từ một điểm O trong không gian ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ rồi vẽ hình bình hành $OACB$ (h.3.19).

Ta có $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}.$

Từ đó ta suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ khi và chỉ khi $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$ hay $OC = BA$ nghĩa là khi và chỉ khi $OACB$ là hình chữ nhật. Khi đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh đường thẳng AO vuông góc với đường thẳng CD.



Hình 3.20

Giải

Ta có :

$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD}$$

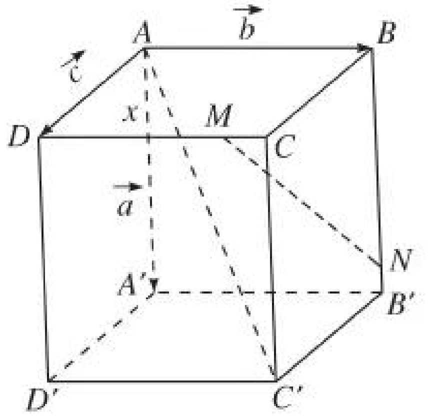
$$=a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0.$$

Do đó $AO\perp CD$ (h.3.20).

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $DM = BN = x$ với $0 \le x \le a$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AC' và MN vuông góc với nhau.

Giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ (h.3.21).



Hình 3.21

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$

và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

hay $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Mặt khác $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$$

với $\overrightarrow{BN} = \dfrac{x}{a}.\vec{a}$ và $\overrightarrow{DM} = \dfrac{x}{a}\cdot\vec{b}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \dfrac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \dfrac{x}{a}\vec{b}\right) = \dfrac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\left[\dfrac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}\right]$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 \text{ (vì } \vec{a}.\vec{b} = 0, \vec{b}.\vec{c} = 0, \vec{c}.\vec{a} = 0)$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0 \text{ (vì } \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2).$$

Do đó $AC' \perp MN$.

Vấn đề 3

Dùng tích vô hướng để tính góc của hai đường thẳng trong không gian

1. Phương pháp giải

- Muốn tính góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ta có thể dựa vào công thức

$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,.\,|\overrightarrow{OB}|}$, và từ đó suy ra góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Đặc biệt nếu $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$ ta có $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 90^{o}$.

• Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $\alpha \leq 90^{o}$ và bằng $180^{o} - \alpha$ nếu $\alpha > 90^{o}$.

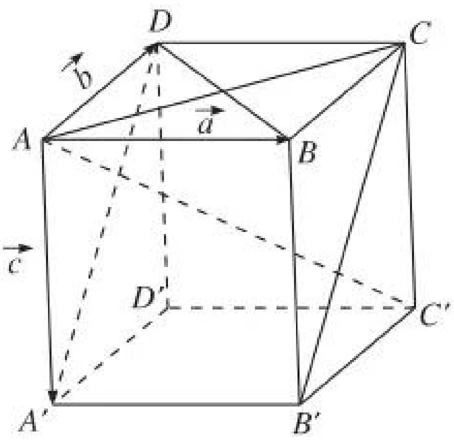
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DA'.

b) Chứng minh $BD \perp AC'$.

Giải



Hình 3.22

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (h.3.22).

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}.$$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DA'}}{|\overrightarrow{AC}|\,.\,|\overrightarrow{DA'}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})\,.\,(\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|\,.\,|\vec{c} - \vec{b}|}.$$

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng x ta có :

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2}{x\sqrt{2}\,.\,x\sqrt{2}} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

(vì $\vec{a}\,.\,\vec{c} = 0$, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$, $\vec{b}\,.\,\vec{c} = 0$ và $\vec{b}^2 = x^2$).

Vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = 120^{o}$.

Ta suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60^{o}.

Cách khác. Từ đỉnh C, nối CB' ta có $CB' \,//\, DA'$. Góc giữa AC và DA' chính là góc giữa AC và CB'. Ta có ACB' là tam giác đều có độ dài mỗi cạnh bằng $x\sqrt{2}$ nên góc $\widehat{ACB'} = 60^{o}$ hay góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60^{o}.

b) Ta cần tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Vậy $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$= \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b}.\vec{c} - \vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$$

$$= 0 + \vec{b}^2 + 0 - \vec{a}^2 + 0 - 0 = 0.$$

Vậy $BD \perp AC'$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

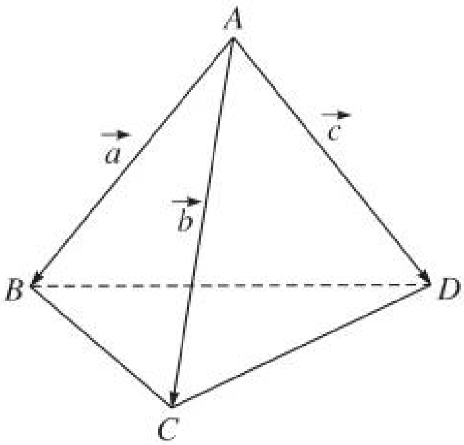
Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{\vec{a}.(\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{c} - \vec{b}|}$$

$$= \frac{\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b}}{a.a} = \frac{a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2}}{a^2} = 0$$

vì $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$ (h.3.23).



Hình 3.23

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GC} = 0$.

3.9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, BC, AD và có $MN = PQ$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

3.10. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

3.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

3.12. Chứng minh rằng một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

3.13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau (hình hộp như vậy còn được gọi là hình hộp thoi). Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$.

3.14. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^{\circ}$. Chứng minh tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

3.15. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.