§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

2.16. (h.2.34) Gọi I là trung điểm CD.

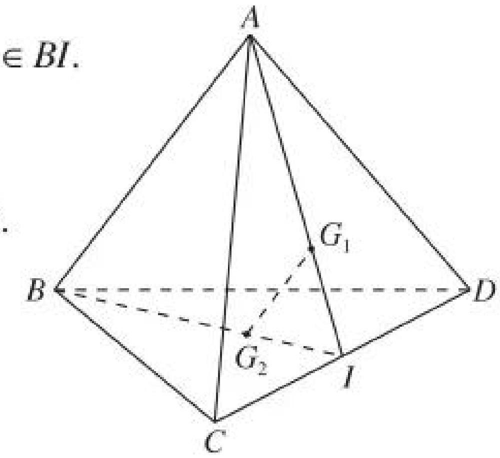
Vì G_1 là trọng tâm của tam giác ACD nên $G_1 \in AI$.

Vì G_2 là trọng tâm của tam giác BCD nên $G_2 \in BI$.

Ta có : $\begin{cases} \dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IG_2}{IB} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IB} \Rightarrow G_1G_2 \mathbin{//} AB.$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \mathbin{//} (ABC)$

và $AB \subset (ABD) \Rightarrow G_1G_2 \mathbin{//} (ABD)$.



Hình 2.34

2.17. (h.2.35) a) Ta có : $OO' \,//\, DF$ (đường trung bình của tam giác BDF).

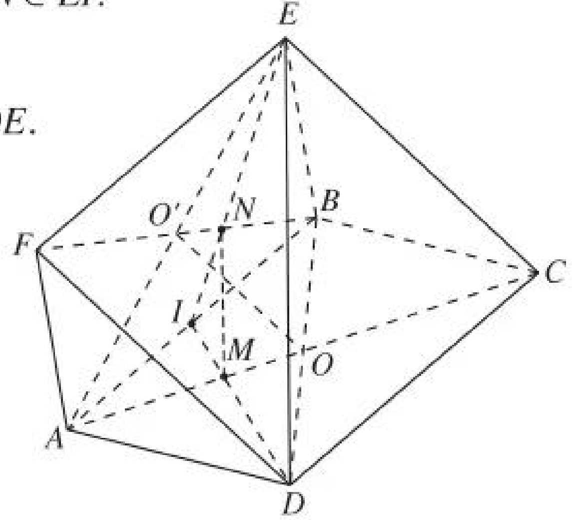
Vì $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \,//\, (ADF)$.

Tương tự $OO' \,//\, EC$ (đường trung bình của tam giác AEC).

Vì $EC \subset (BCE)$ nên $OO' \,//\, (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB ;
Vì M là trọng tâm của tam giác ABD nên $M \in DI$.
Vì N là trọng tâm của tam giác ABE nên $N \in EI$.

Ta có : $\begin{cases} \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} \Rightarrow MN \,//\, DE.$



Hình 2.35

Mà $\begin{cases} CD \,//\, AB \\ CD = AB \\ EF \,//\, AB \\ EF = AB \end{cases}$

nên $CD \,//\, EF$ và $CD = EF$, suy ra tứ giác $CDFE$ là hình bình hành.

$\begin{cases} MN \,//\, DE \\ DE \subset (CEF) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (CEF).$

2.18. (h.2.36) a) Dễ thấy S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

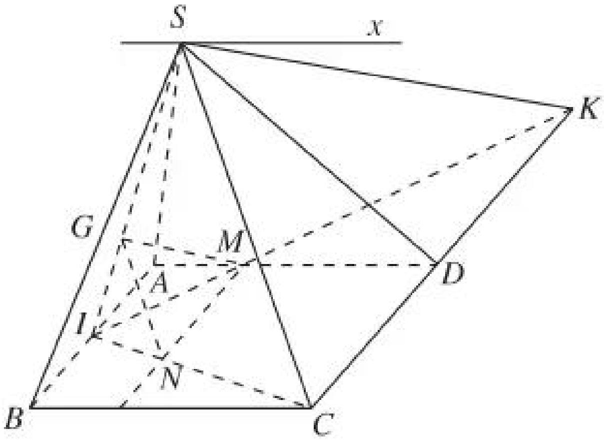
Ta có : $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \,//\, BC \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx$

và $Sx \,//\, AD \,//\, BC$.

b) Ta có : $MN \,//\, IA \,//\, CD$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3},$



Hình 2.36

mà $\frac{IG}{IS}=\frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của ΔSAB) nên $\frac{IG}{IS}=\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow GN\,//\,SC$

$SC\subset(SCD)\Rightarrow GN\,//\,(SCD)$.

c) Giả sử IM cắt CD tại $K\Rightarrow SK\subset(SCD)$

$MN\,//\,CD\Rightarrow\frac{MN}{CK}=\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IM}{IK}=\frac{1}{3}\cdot$

Ta có : $\begin{cases}\frac{IG}{IS}=\frac{1}{3}\\ \frac{IM}{IK}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow GM\,//\,SK\;\Rightarrow GM\,//\,(SCD)$.

2.19. (h.2.37) a) Gọi H là trung điểm của SC.

Ta có : $\frac{DG}{DH}=\frac{2}{3}\cdot$ (1)

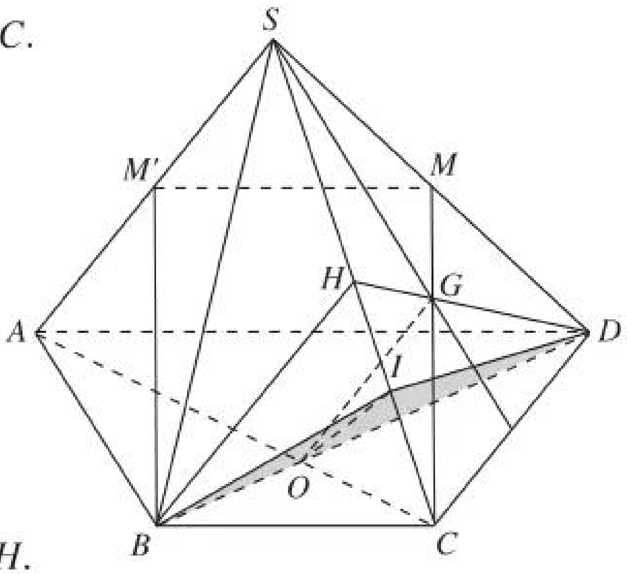
$BC\,//\,AD\Rightarrow\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}=\frac{AD}{BC}=2$

$\Rightarrow OD=2OB$

$\Rightarrow\frac{OD}{BD}=\frac{2}{3}\cdot$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{DG}{DH}=\frac{OD}{BD}\Rightarrow OG\,//\,BH$.

$BH\subset(SBC)\Rightarrow OG\,//\,(SBC)$.



Hình 2.37

b) Gọi M' là trung điểm của $SA\Rightarrow MM'\,//\,AD$ và $MM'=\frac{AD}{2}\cdot$ Mặt khác vì $BC\,//\,AD$ và $BC=\frac{AD}{2}$ nên $BC\,//\,MM'$ và $BC=MM'$.

Do đó tứ giác $BCMM'$ là hình bình hành $\Rightarrow CM\,//\,BM'$ mà $BM'\subset(SAB)$

$\Rightarrow CM\,//\,(SAB)$.

c) Ta có : $\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}$ nên $\frac{OC}{CA}=\frac{1}{3}\cdot$ Mặt khác vì $SC=\frac{3}{2}SI$ nên $\frac{CI}{CS}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{OC}{CA} = \dfrac{CI}{CS} \Rightarrow OI \,//\, SA.$

$OI \subset (BID) \Rightarrow SA \,//\, (BID).$

2.20. (h.2.38) a) $\begin{cases} (\alpha) \,//\, AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$

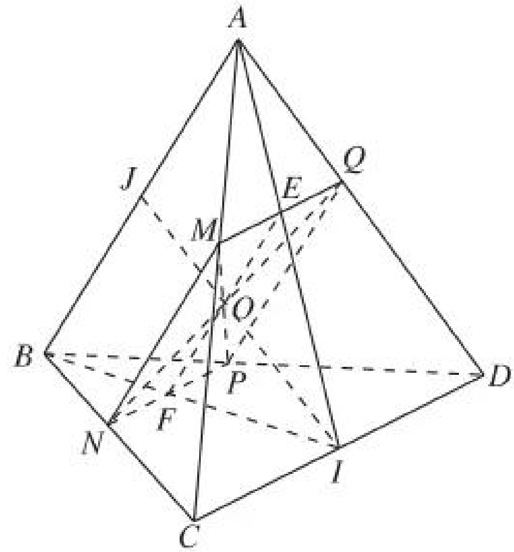
$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN$ và $MN \,//\, AB.$

Ta có $N \in (BCD)$

và $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases}$

nên $(\alpha) \cap (BCD) = NP$ và $NP \,//\, CD.$

Ta có $P \in (ABD)$



Hình 2.38

và $\begin{cases} (\alpha) \,//\, AB \\ AB \subset (ABD) \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ABD) = PQ$ và $PQ \,//\, AB.$

$\begin{cases} Q \in (ACD) \\ (\alpha) \,//\, CD \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ACD) = MQ$ và $MQ \,//\, CD.$

Do đó $MN \,//\, PQ$ và $NP \,//\, MQ$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Ta có : $MP \cap NQ = O$. Gọi I là trung điểm của CD.

Trong tam giác ACD có : $MQ \,//\, CD \Rightarrow AI$ cắt MQ tại trung điểm E của MQ.

Trong tam giác BCD có : $NP \,//\, CD \Rightarrow BI$ cắt NP tại trung điểm F của NP.

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên ta có $\begin{cases} EF \,//\, MN \\ O \text{ là trung điểm } EF. \end{cases}$

$EF \,//\, MN \Rightarrow EF \,//\, AB.$

Trong ΔABI ta có $EF \,//\, AB$ suy ra : IO cắt AB tại trung điểm J

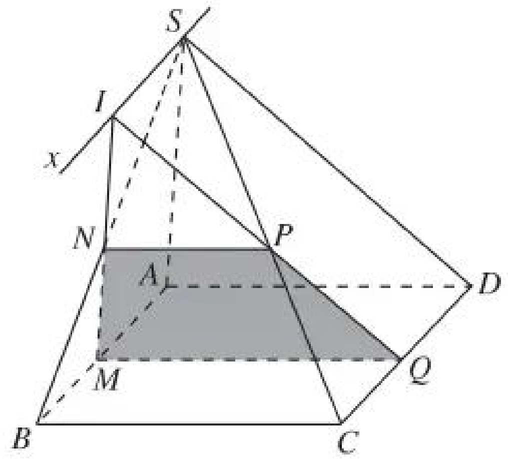
$\Rightarrow I, O, J$ thẳng hàng

$\Rightarrow O \in IJ$ cố định.

Vì M di động trên đoạn AC nên O chạy trong đoạn IJ. Vậy tập hợp các điểm O là đoạn IJ.

2.21. (h.2.39) a) Vì $M \in (SAB)$

và $\begin{cases}(\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (SAB) = MN$ và $MN // SA$.



Hình 2.39

Vì $N \in (SBC)$

và $\begin{cases}(\alpha) // BC \\ BC \subset (SBC)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (SBC) = NP$

và $NP // BC$ (1)

$\begin{cases}P, Q \in (\alpha) \\ P, Q \in (SCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PQ.$

$Q \in CD \Rightarrow Q \in (ABCD)$

và $\begin{cases}(\alpha) // BC \\ BC \subset (ABCD)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ABCD) = QM$

và $QM // BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

b) Ta có : $\begin{cases}S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \text{ và } Sx // AB // CD. \\ AB // CD\end{cases}$

$MN \cap PQ = I \Rightarrow \begin{cases}I \in MN \\ I \in PQ.\end{cases}$

$MN \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB)$, $PQ \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow I \in Sx.$

(SAB) và (SCD) cố định $\Rightarrow$ Sx cố định $\Rightarrow I$ thuộc Sx cố định.