§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Đường thẳng d được gọi là *vuông góc với mặt phẳng* (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Khi đó ta còn nói (α) *vuông góc với* d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với (α).

III. TÍNH CHẤT

1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

IV. SỰ LIÊN QUAN GIỮA QUAN HỆ VUÔNG GÓC VÀ QUAN HỆ SONG SONG

1. a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

2. a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

3. a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa. Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α).

2. Định lí ba đường vuông góc. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Ta có định nghĩa :

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là *góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng* (α).

Lưu ý rằng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90°.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) người ta thường dùng một trong hai cách sau đây :

- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α).
- Chứng minh đường thẳng a song song với đường thẳng b mà b vuông góc với (α).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$ và $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc (AHK).

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$, từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Giải

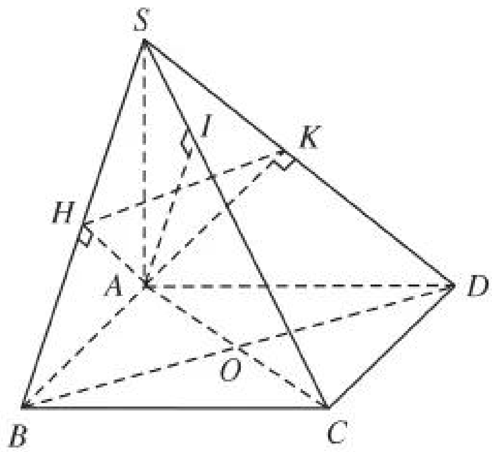
a) $BC \perp AB$ vì đáy $ABCD$ là hình vuông (h.3.24).

$BC \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$ và BC thuộc $(ABCD)$.

Do đó $BC \perp (SAB)$ vì BC vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (SAB).

Lập luận tương tự ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ vì đáy $ABCD$ là hình vuông và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.



Hình 3.24

b) $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ và theo giả thiết $SB \perp AH$ ta suy ra $AH \perp (SBC)$. Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$.

Lập luận tương tự ta chứng minh được $AK \perp SC$. Hai đường thẳng AH, AK cắt nhau và cùng vuông góc với SC nên chúng nằm trong mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với SC. Vậy $SC \perp (AHK)$. Ta có $AI \subset (AHK)$ vì nó đi qua điểm A và cùng vuông góc với SC.

c) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD. \end{cases}$

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có cạnh SA chung và $AB = AD$ (c.g.c). Do đó $SB = SD$, $SH = SK$ nên $HK // BD$.

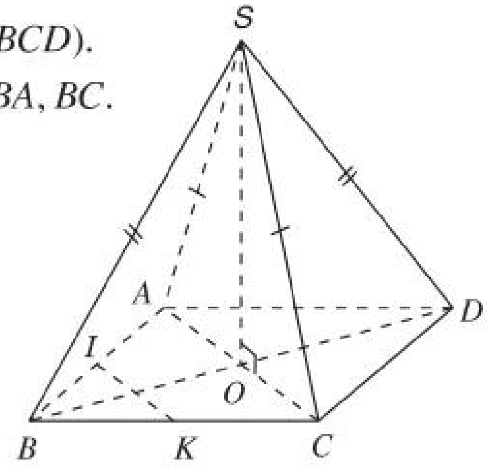
Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$ và do $AI \subset (SAC)$ nên $HK \perp AI$.

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O và có $SA = SC$, $SB = SD$.

a) Chứng minh SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC.

Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.



Hình 3.25

Giải

a) O là tâm hình thoi $ABCD$ nên O là trung điểm của đoạn AC (h.3.25). Tam giác SAC có $SA = SC$ nên $SO \perp AC$. Chứng minh tương tự ta có $SO \perp BD$. Từ đó ta suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Mặt khác ta có $AC \perp SO$. Do đó $AC \perp (SBD)$. Ta có IK là đường trung bình của tam giác BAC nên $IK // AC$ mà $AC \perp (SBD)$ nên $IK \perp (SBD)$.

Ta lại có SD nằm trong mặt phẳng (SBD) nên $IK \perp SD$.

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải

– Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b, ta tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

– Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

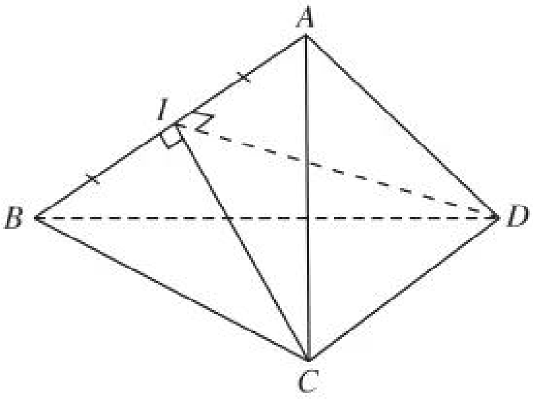
Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Giải

Giả sử ta cần chứng minh $AB \perp CD$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB (h.3.26). Ta có :

$$\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CID).$$

Do đó $AB \perp CD$ vì CD nằm trong mặt phẳng (CID).



Hình 3.26

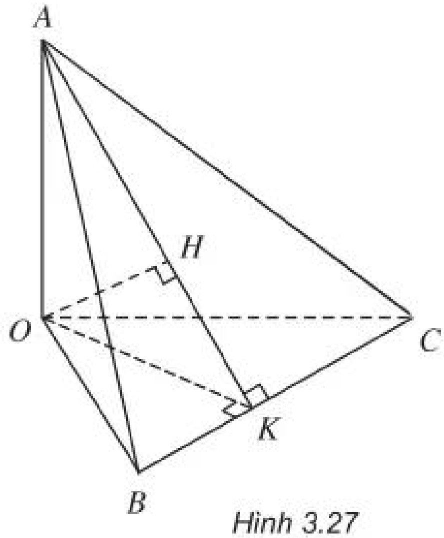
Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được $BC \perp AD$ và $AC \perp BD$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh :

a) $OA \perp BC$, $OB \perp CA$ và $OC \perp AB$;

b) H là trực tâm của tam giác ABC ;

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.



Hình 3.27

Giải

a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases}$

$\Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ (h.3.27).

Tương tự ta chứng minh $OB \perp (OCA) \Rightarrow OB \perp CA$

$OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

b) Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$ và $OA \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi K là giao điểm của AH và BC. Trong tam giác AOK vuông tại O, ta có OH là đường cao. Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông của hình học phẳng ta có :

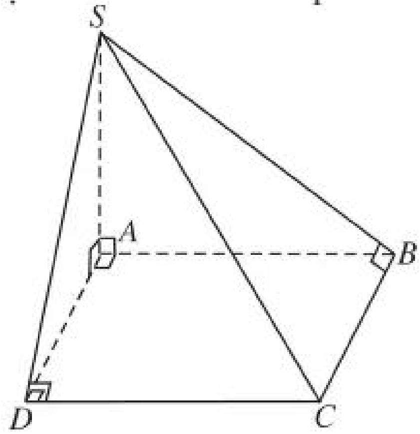
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}. \qquad (1)$$

Vì BC vuông góc với mặt phẳng (OAH) nên $BC \perp OK$. Do đó trong tam giác OBC vuông tại O với đường cao OK ta có :

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh các mặt bên của hình chóp đã cho là những tam giác vuông.



Hình 3.28

Giải

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AD$ (h.3.28).

Vậy các tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

$$\begin{cases} CD \perp DA \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB.$$

Vậy tam giác SDC vuông tại D và tam giác SBC vuông tại B.

Chú thích. Muốn chứng minh tam giác SDC vuông tại D ta có thể áp dụng định lí ba đường vuông góc và lập luận như sau

Đường thẳng SD có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AD. Theo định lí ba đường vuông góc vì $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ và ta có tam giác SDC vuông tại D.

Tương tự, ta chứng minh được $CB \perp SB$ và ta có tam giác SBC vuông tại B.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.16. Một đoạn thẳng AB không vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng này tại trung điểm O của đoạn thẳng đó. Các đường thẳng vuông góc với (α) qua A và B lần lượt cắt mặt phẳng (α) tại A' và B'.

Chứng minh ba điểm A', O, B' thẳng hàng và $AA' = BB'$.

3.17. Cho tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CA tại A và (β) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CB tại B. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và giao tuyến d của chúng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

3.18. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $A'H$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.

b) Gọi MM' là giao tuyến của mặt phẳng (AHA') với mặt bên $BCC'B'$, trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh rằng tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

3.19. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy là (ABC). Gọi D là điểm đối xứng của điểm B qua trung điểm O của cạnh AC. Chứng minh rằng $CD \perp CA$ và $CD \perp (SCA)$.

3.20. Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có chung cạnh đáy BC tạo nên tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI.

Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3.21. Chứng minh rằng tập hợp những điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC đó.