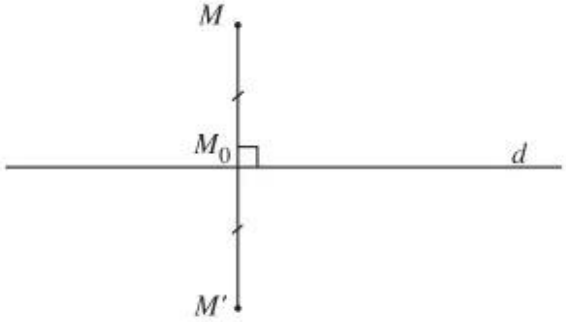
§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng qua đường thẳng d* hay *phép đối xứng trục d* (h.1.5).

Phép đối xứng qua trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy $M' = Đ_d(M)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d.



Hình 1.5

Đường thẳng d được gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathscr{H}$ nếu $Đ_d$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathscr{H}$ được gọi là *hình có trục đối xứng*.

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d. Với mỗi điểm $M = (x ; y)$, gọi $M' = Đ_d(M) = (x' ; y')$.

Nếu chọn d là trục Ox, thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$

Nếu chọn d là trục Oy, thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$

III. TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;

2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng ;

3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;

4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép đối xứng trục

1. Phương pháp giải

Để xác định ảnh H' của hình $\mathcal{H}$ qua phép đối xứng qua đường thẳng d ta có thể dùng các phương pháp sau :

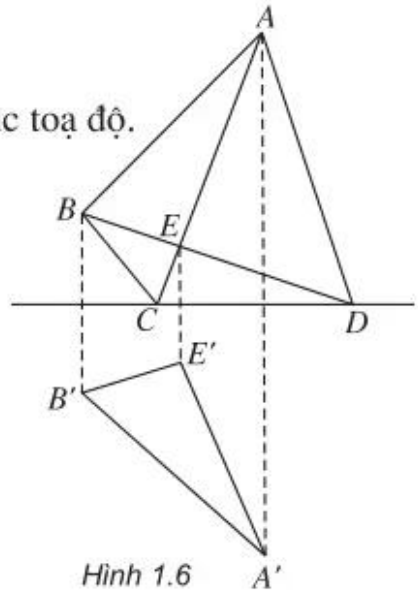
– Dùng định nghĩa của phép đối xứng trục ;

– Dùng biểu thức vectơ của phép đối xứng trục ;

– Dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua các trục toạ độ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Xác định ảnh của tam giác ABE qua phép đối xứng qua đường thẳng CD.



Hình 1.6

Giải

Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác A, B, E qua phép đối xứng đó. Ảnh phải tìm là tam giác $A'B'E'$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1; 5)$, đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Giải

a) Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox.

Khi đó $M' = (1 ; -5)$.

Để tìm d' ta sử dụng biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục Ox : Gọi điểm $N'(x' ; y')$ là ảnh của điểm $N(x ; y)$ qua phép đối xứng trục Ox.

Khi đó $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

Ta có $N \in d \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x' - 2(-y') + 4 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ N' thuộc đường thẳng d' có phương trình $x + 2y + 4 = 0$.

Vậy ảnh của d là đường thẳng d' có phương trình $x + 2y + 4 = 0$.

Để tìm (C'), trước hết ta để ý rằng (C) là đường tròn tâm $J = (1 ; -2)$, bán kính $R = 3$. Gọi J' là ảnh của J qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $J' = (1 ; 2)$. Do đó (C') là đường tròn tâm J' bán kính bằng 3. Từ đó suy ra (C') có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

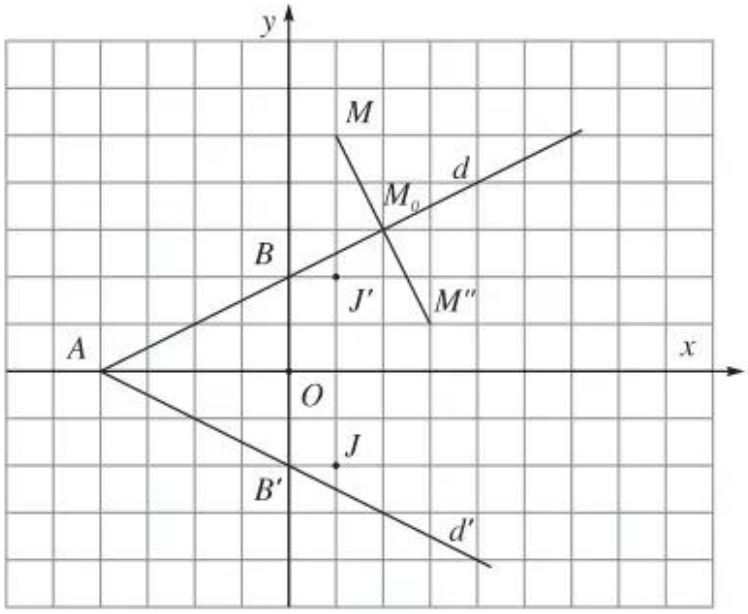
b) Đường thẳng d_1 qua M vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0 \text{ (h.1.7).}$$

Giao của d và d_1 là điểm M_0 có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $M_0 = (2 ; 3)$. Từ đó suy ra ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d là M'' sao cho M_0 là trung điểm của MM'', do đó $M'' = (3 ; 1)$.



Hình 1.7

VẤN ĐỀ 2

Tìm trục đối xứng của một đa giác

1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất : Nếu một đa giác có trục đối xứng d thì qua phép đối xứng trục d mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác bằng cạnh ấy.

2. Ví dụ

Ví dụ. Tìm các trục đối xứng của một hình chữ nhật.

Giải

Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB > BC$. Gọi F là phép đối xứng qua trục d biến $ABCD$ thành chính nó. Khi đó cạnh AB chỉ có thể biến thành chính nó hoặc biến thành cạnh CD.

Nếu AB biến thành chính nó thì chỉ có thể xảy ra $F(A) = B$ (vì nếu $F(A) = A$ thì $F(B) = B$ suy ra d trùng với đường thẳng AB, điều này vô lí). Khi đó d là đường trung trực của AB.

Nếu AB biến thành CD, thì không thể xảy ra $F(A) = C$, $F(B) = D$. Vì nếu thế thì $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với d) điều đó vô lí. Vậy chỉ có thể $F(A) = D$, $F(B) = C$. Khi đó d là đường trung trực của AD.

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có hai trục đối xứng là các đường trung trực của AB và AD.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép đối xứng trục để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng trục, hoặc xem điểm M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép đối xứng trục.

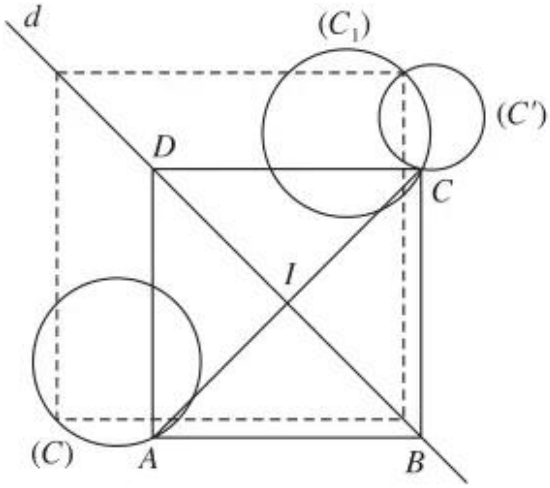
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai đường tròn (C), (C') có bán kính khác nhau và đường thẳng d. Hãy dựng hình vuông $ABCD$ có hai đỉnh A, C lần lượt nằm trên (C), (C') còn hai đỉnh kia nằm trên d.

Giải

Phân tích

Giả sử hình vuông đã dựng được. Ta thấy hai đỉnh B và D của hình vuông $ABCD$ luôn thuộc d nên hình vuông hoàn toàn xác định khi biết đỉnh C. Xem C là ảnh của A qua phép đối xứng qua trục d. Vì A thuộc đường tròn (C) nên C thuộc đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trục d. Mặt khác C luôn thuộc đường tròn (C'). Vậy C phải là giao của đường tròn (C_1) với đường tròn (C').



Hình 1.8

Từ đó suy ra cách dựng.

Cách dựng

a) Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trục d.

b) Từ C thuộc $(C_1) \cap (C')$ dựng điểm A đối xứng với C qua d. Gọi I là giao của AC với d.

c) Lấy trên d hai điểm B và D sao cho I là trung điểm của BD và $IB = ID = IA$.

Khi đó hình vuông $ABCD$ là hình cần dựng.

Chứng minh

Dễ thấy $ABCD$ là hình vuông có B và D thuộc d, C thuộc (C'). Ta chỉ cần chứng minh A thuộc (C). Thật vậy vì A đối xứng với C qua d, mà C thuộc (C') nên A phải thuộc (C) là ảnh của (C') qua phép đối xứng qua trục d.

Biện luận

Bài toán có một, hai, hay vô nghiệm tuỳ theo số giao điểm của (C_1) với (C').

VẤN ĐỀ 4

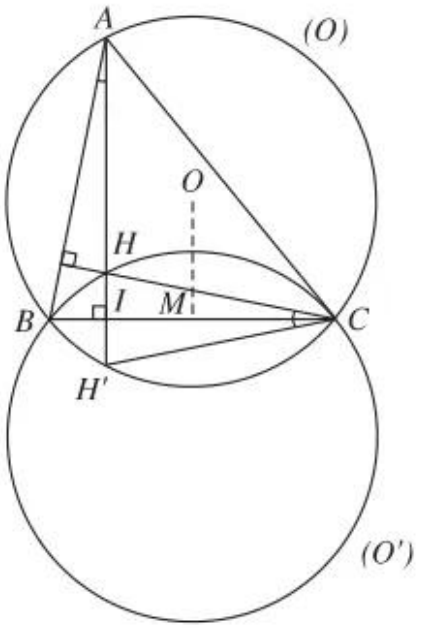
Dùng phép đối xứng trục để giải một số bài toán tìm tập hợp điểm

1. Phương pháp giải

Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép đối xứng trục.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai điểm phân biệt B và C cố định trên đường tròn (O) tâm O, điểm A di động trên đường tròn (O). Chứng minh rằng khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.



Hình 1.9

Giải

Gọi I, H' theo thứ tự là giao của tia AH với BC và đường tròn (O). Ta có

$\widehat{BAH} = \widehat{HCB}$ (tương ứng vuông góc)

$\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$ (cùng chắn một cung).

Vậy tam giác CHH' cân tại C, suy ra H và H' đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Khi A chạy trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O). Do đó H phải chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng qua đường thẳng BC.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(3 ; -5)$, đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox.

1.7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x - 5y + 7 = 0$ và đường thẳng d' có phương trình $5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng trục biến d thành d'.

1.8. Tìm các trục đối xứng của hình vuông.

1.9. Cho hai đường thẳng c, d cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng điểm C trên c, điểm D trên d sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nhận AB là một cạnh đáy (không cần biện luận).

1.10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B không thuộc d nhưng nằm cùng phía đối với d. Tìm trên d điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến A và B là bé nhất.