§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

2.22. (h.2.40) Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và BD.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$\dfrac{AG_1}{AI} = \dfrac{AG_2}{AJ} = \dfrac{AG_3}{AK} = \dfrac{2}{3}$

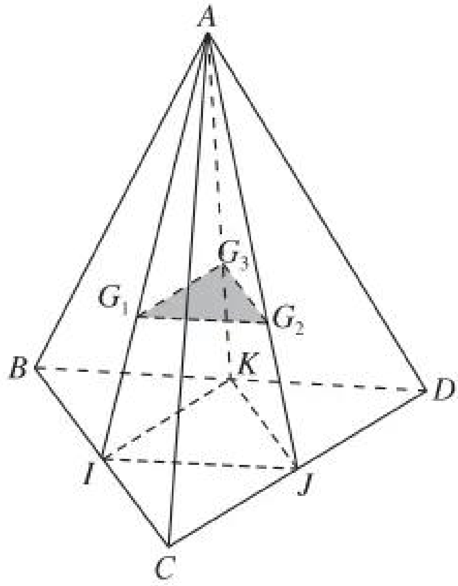
$\Rightarrow G_1G_2 \parallel IJ$.

$IJ \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD)$.

Tương tự ta có $G_2G_3 \parallel (BCD)$.

$G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3)$

$\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.



Hình 2.40

2.23. (h.2.41) a) Ta có : $\begin{cases} Ax \parallel Dt \\ Dt \subset (Cz, Dt) \end{cases}$

$\Rightarrow Ax \parallel (Cz, Dt)$.

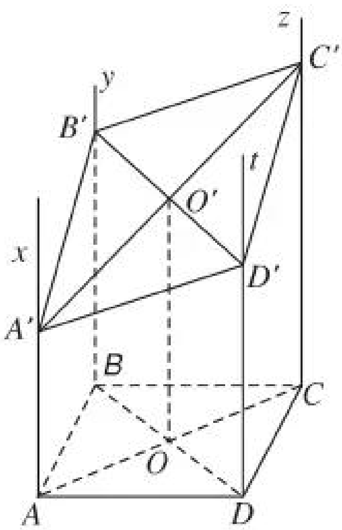
$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ CD \subset (Cz, Dt) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel (Cz, Dt)$.

Từ $Ax, AB \subset (Ax, By)$ suy ra $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$.

Tương tự ta có $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.

b) $\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, By) = A'B' \\ (\alpha) \cap (Cz, Dt) = C'D' \\ (Ax, By) \parallel (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel C'D' \qquad (1)$

$\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (\alpha) \cap (By, Cz) = B'C' \\ (Ax, Dt) \parallel (By, Cz) \end{cases} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'. \qquad (2)$



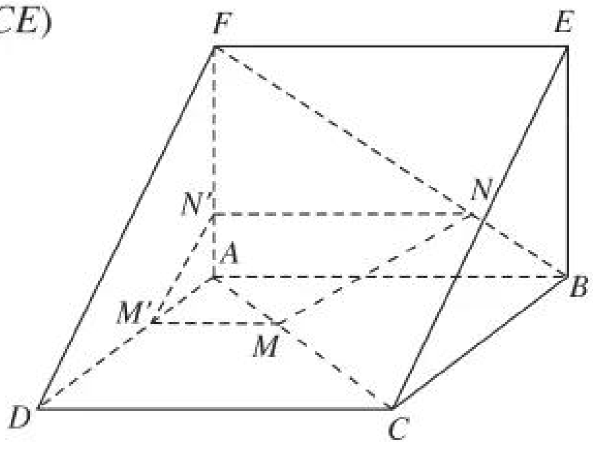
Hình 2.41

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

c) Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$. Dễ thấy OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$, suy ra $OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$.

Tương tự ta có : $OO' = \dfrac{BB' + DD'}{2} \Rightarrow AA' + CC' = BB' + DD'$.

2.24. (h.2.42) a) $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \,//\, (BCE)$



Hình 2.42

$\begin{cases} AF \,//\, BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \,//\, (BCE)$

Mà $AD, AF \subset (ADF)$

nên $(ADF) \,//\, (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông nên $AC = BF$. Ta có :

$MM' \,//\, CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (1)

$NN' \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}\cdot$ (2)

So sánh (1) và (2) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \,//\, DF$.

c) Từ chứng minh trên suy ra $DF \,//\, (MM'N'N)$

$\left.\begin{array}{l} NN' \,//\, AB \Rightarrow NN' \,//\, EF \\ NN' \subset (MM'N'N) \end{array}\right\} \Rightarrow EF \,//\, (MM'N'N).$

Mà $DF, EF \subset (DEF)$ nên $(DEF) \,//\, (MM'N'N)$.

Vì $MN \subset (MM'N'N)$ và $(MM'N'N) \,//\, (DEF)$ nên $MN \,//\, (DEF)$.

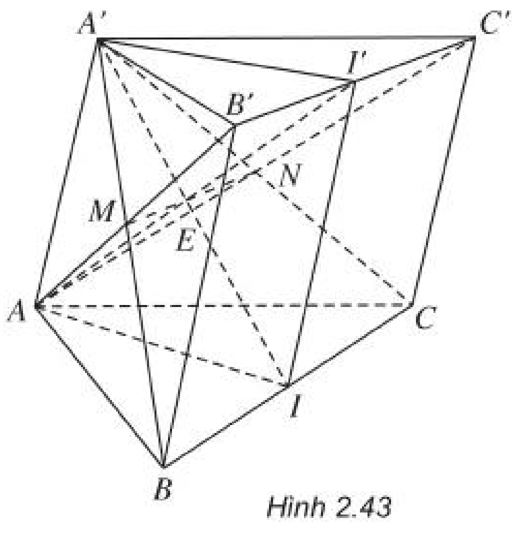
2.25. (h.2.43) a) Ta có $II' \,//\, BB'$ và $II' = BB'$.

Mặt khác $AA' \,//\, BB'$ và $AA' = BB'$ nên :

$AA' \,//\, II'$ và $AA' = II'$

$\Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành

$\Rightarrow AI \,//\, A'I'$.



Hình 2.43

b) Ta có : $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (AA'I'I) \end{cases}$

$\Rightarrow A \in (AB'C') \cap (AA'I'I)$.

Tương tự : $\begin{cases} I' \in B'C' \\ I' \in (AA'I'I) \end{cases} \Rightarrow I' \in (AB'C')$

$\Rightarrow I' \in (AB'C') \cap (AA'I'I) \Rightarrow (AB'C') \cap (AA'I'I) = AI'$.

Đặt $AI' \cap A'I = E$. Ta có : $\begin{cases} E \in IA' \\ E \in AI' \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C')$.

Vậy E là giao điểm của $A'I$ và mặt phẳng $(AB'C')$.

c) Ta có : $A'B \cap AB' = M \Rightarrow \begin{cases} M \in (AB'C') \\ M \in (A'BC). \end{cases}$

Tương tự : $AC' \cap A'C = N \Rightarrow \begin{cases} N \in (AB'C') \\ N \in (A'BC). \end{cases}$

Vậy $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

2.26. (h.2.44) a) Ta có tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành suy ra $A'C$ cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.

Do đó IH // CB' (đường trung bình của tam giác $CB'A'$).

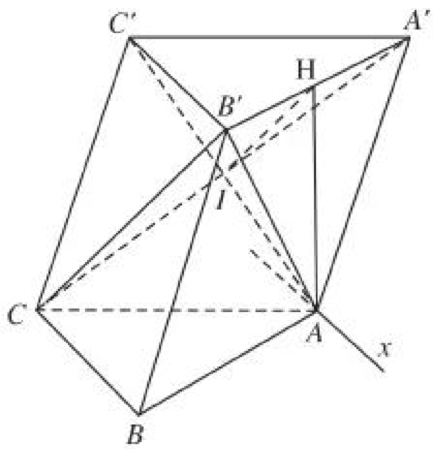
Mặt khác $IH \subset (AHC')$ nên CB' // (AHC').

b) Ta có : $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow A$ là điểm chung của $(AB'C')$ và (ABC),

mà $\begin{cases} B'C' \,//\, BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

nên $(AB'C') \cap (ABC) = Ax$ và $Ax \,//\, BC \,//\, B'C'$.



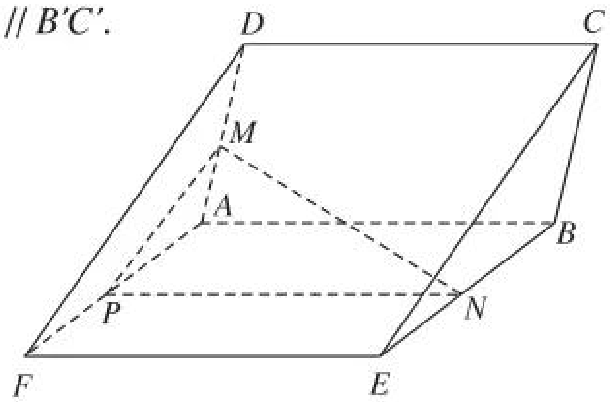
Hình 2.44

2.27. (h.2.45) Trong mặt phẳng (ADF), kẻ đường thẳng MP // DF ($P \in AF$).

Ta có $\dfrac{AP}{PF} = \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{NE}$

nên PN // FE. Do đó (MNP) // (DEF).

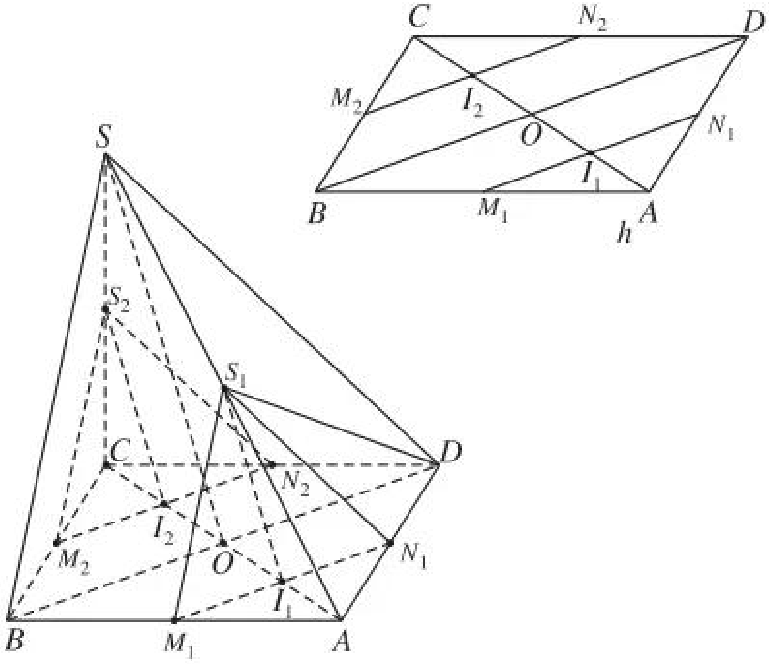
Vậy MN song song với mặt phẳng (DEF) cố định.



Hình 2.45

2.28. (h.2.46) a) *Trường hợp 1.*

I thuộc đoạn AO $(0 < x < \dfrac{a}{2})$



Hình 2.46

Khi đó I ở vị trí I_1.

Ta có : $(\alpha) \,//\, (SBD)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \,//\, BD \\ (\alpha) \,//\, SO \end{cases}$$

Vì $(\alpha) \,//\, BD$ nên (α) cắt (ABD) theo giao tuyến M_1N_1 (qua I_1) song song với BD.

Tương tự $(\alpha) \,//\, SO$ nên (α) cắt (SOA) theo giao tuyến S_1I_1 song song với SO.

Ta có thiết diện trong trường hợp này là tam giác $S_1M_1N_1$.

Nhận xét. Dễ thấy rằng $S_1M_1 \,//\, SB$ và $S_1N_1 \,//\, SD$. Lúc đó tam giác $S_1M_1N_1$ đều.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC $(\dfrac{a}{2} < x < a)$

Khi đó I ở vị trí I_2. Tương tự như trường hợp 1 ta có thiết diện là tam giác đều $S_2M_2N_2$ có $M_2N_2 \,//\, BD$, $S_2M_2 \,//\, SB$, $S_2N_2 \,//\, SD$.

Trường hợp 3. $I \equiv O$: Thiết diện chính là tam giác đều SBD.

b) Ta lần lượt tìm diện tích thiết diện trong các trường hợp 1, 2, 3.

Trường hợp 1. I thuộc đoạn AO $(0 < x < \dfrac{a}{2})$

$$\frac{S_{S_1M_1N_1}}{S_{SBD}} = \left(\frac{M_1N_1}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2x}{a}\right)^2$$

$$S_{S_1M_1N_1} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot S_{SBD} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC ($\frac{a}{2} < x < a$)

$$\frac{S_{S_2M_2N_2}}{S_{SBD}} = \left(\frac{M_2N_2}{BD}\right)^2 = \left[\frac{2(a-x)}{a}\right]^2$$

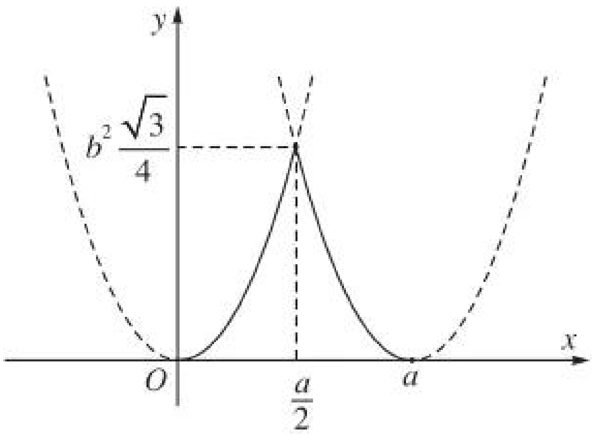
$$S_{S_2M_2N_2} = \frac{4}{a^2}(a-x)^2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{a^2}(a-x)^2$$

Trường hợp 3. $I \equiv O$

$$S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tóm lại $S_{thiết\ diện} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2} & \text{nếu } 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} & \text{nếu } x = \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{a^2}(a-x)^2 & \text{nếu } \dfrac{a}{2} < x < a. \end{cases}$

c) (h.2.47) Đồ thị của hàm số S theo biến x như sau :



Hình 2.47

Vậy $S_{thiết\ diện}$ lớn nhất khi và chỉ khi x = $\frac{a}{2}$.

2.29. (h.2.48) Vì $(\alpha)//(\beta)//(\gamma)$ nên $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot$

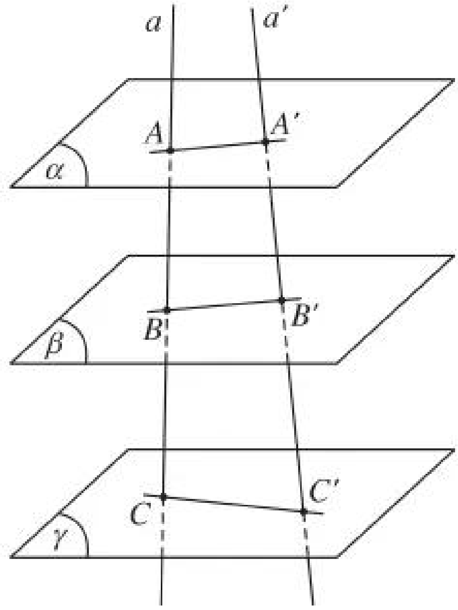
Mặt khác ta có :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+BC}{A'B'+B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Suy ra : $A'B'=\dfrac{A'C'.AB}{AC}=\dfrac{18.5}{9}=10$.

Vậy $A'B'=10$ và $B'C'=\dfrac{A'C'.BC}{AC}=\dfrac{18.4}{9}=8.$

Vậy $B'C'=8.$



Hình 2.48

2.30. (h.2.49) Qua I kẻ đường thẳng song song với CD cắt AC tại H, ta có :

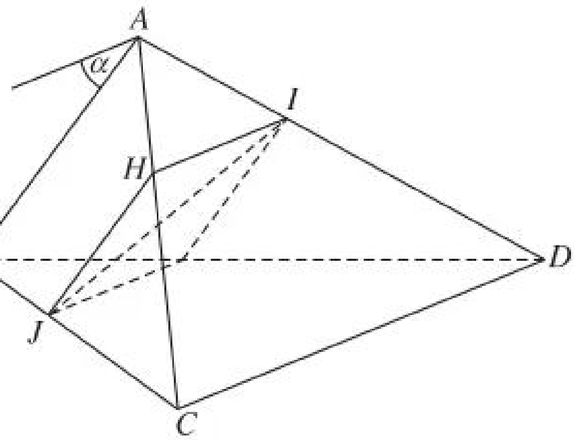
$$\frac{HA}{HC}=\frac{IA}{ID}.$$

Mặt khác $\dfrac{IA}{ID}=\dfrac{JB}{JC}$

nên $\dfrac{HA}{HC}=\dfrac{JB}{JC}\cdot$

Suy ra $HJ \,//\, AB$.

Như vậy mặt phẳng (IJH) song song với AB và CD.



Hình 2.49

Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với CD, ta có

$$\begin{cases}(\alpha)//(IJH)\\ IJ\subset(IJH)\end{cases}\Rightarrow IJ//(\alpha).$$

Vậy IJ song song với mặt phẳng (α) cố định.

2.31. (h.2.50) a) Gọi (β) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng AB và Ax.

Do $Ax \,//\, (\alpha)$ nên (β) sẽ cắt (α) theo giao tuyến Bx' song song với Ax.

Ta có M' là điểm chung của (α) và (β) nên M' thuộc Bx'.

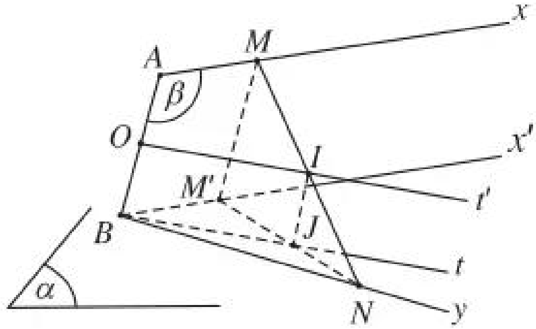
Khi M trùng A thì M' trùng B nên tập hợp M' là tia Bx'.

b) Ta có tứ giác $ABM'M$ là hình bình hành nên $BM' = AM = BN$.

Tam giác $BM'N$ cân tại B.

Suy ra trung điểm J của cạnh đáy NM' thuộc phân giác trong Bt của góc B trong tam giác cân BNM'. Dễ thấy rằng Bt cố định.

Gọi O là trung điểm của AB. Trong mặt phẳng (AB, Bt), tứ giác $OBJI$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BO}$. Do đó I là ảnh của J trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BO}$. Vậy tập hợp I là tia Ot' song song với Bt.



Hình 2.50