§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$.

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing.$$

II. ĐỊNH LÍ VÀ TÍNH CHẤT

1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

$$\begin{cases} a \subset (\alpha),\ b \subset (\alpha) \\ a \text{ cắt } b \\ a // (\beta),\ b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

3. Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Hệ quả

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

4. Định lí Ta-lét (Thalès)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

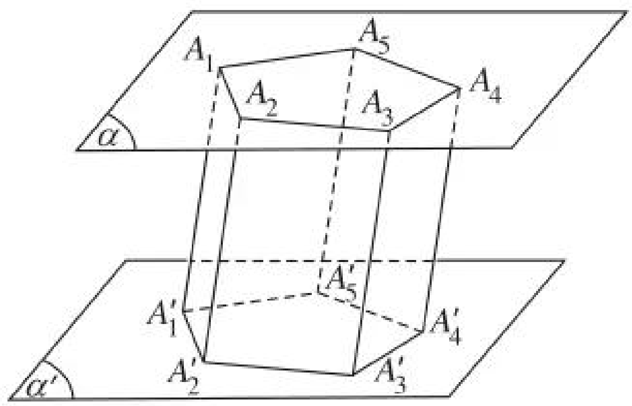
III. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH CHÓP CỤT

• Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A_1', A_2', ..., A_n'$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, ..., $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ (h.2.14).

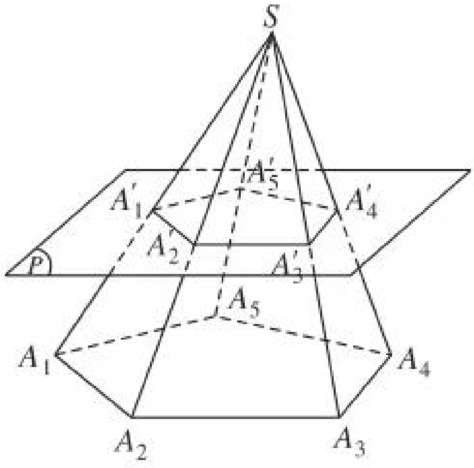
Lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Hình 2.14

• **Hình chóp cụt**

Cho hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$. Một mặt phẳng không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ và đáy $A_1A_2 \ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là *hình chóp cụt*, kí hiệu là $A'_1A'_2 \ldots A'_n.A_1A_2 \ldots A_n$ (h.2.15).



Hình 2.15

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau

1. Phương pháp giải

a) Ta có thể chứng minh chúng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

b) Ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

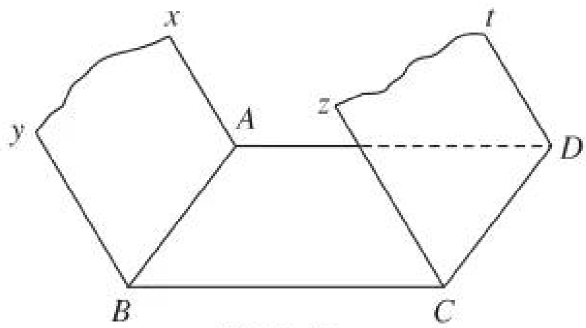
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ các đỉnh A, B, C và D lần lượt kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz và Dt song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh mặt phẳng (Ax, By) song song với mặt phẳng (Cz, Dt).

Giải

Ta có Cz // By nên Cz // (Ax, By) (h 2.16). Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên CD // AB do đó CD // (Ax, By).

Mặt phẳng (Cz, Dt) chứa hai đường thẳng cắt nhau Cz, CD cùng song song với (Ax, By) nên (Cz, Dt) // (Ax, By).



Hình 2.16

Vấn đề 2

Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với một hình chóp khi cho biết (α) song song với một mặt phẳng nào đó trong hình chóp

1. Phương pháp giải

a) *Áp dụng*. Khi (α) song song với một mặt phẳng (β) nào đó thì (α) sẽ song song với tất cả đường thẳng nằm trong (β).

b) Để xác định giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, ta làm như sau :

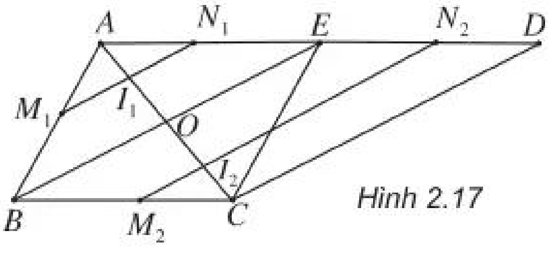
– Tìm đường thẳng d nằm trong (β).

– Vì $(\alpha) \parallel d$ nên (α) cắt những mặt phẳng chứa d theo các giao tuyến song song với d.

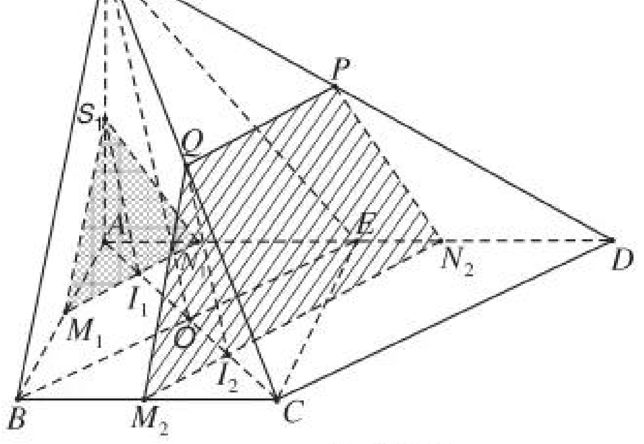
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O là giao điểm của AC và BE. I là một điểm di động trên cạnh AC khác với A và C. Qua I, ta vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Giải



Hình 2.17



Hình 2.18

Ta thấy rằng tứ giác $BEDC$ là hình bình hành vì :

$$ED \parallel BC, ED = BC\left(=\frac{1}{2}AD\right), \text{(h.2.17)}.$$

Trường hợp 1. I thuộc đoạn AO và I khác O. Gọi vị trí này là I_1, $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên $(\alpha) \parallel BE$ và $(\alpha) \parallel SO$ (h.2.18).

- $(\alpha) \parallel BE$ nên (α) cắt (ABE) theo giao tuyến M_1N_1 đi qua I_1 và $M_1N_1 \parallel BE$ ($M_1 \in AB$, $N_1 \in AE$).

- $(\alpha) \parallel SO$ nên (α) cắt (SAC) theo giao tuyến S_1I_1 đi qua I_1 và song song với SO ($S_1 \in SA$).

Ta có thiết diện là tam giác $S_1M_1N_1$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC và I khác O. Gọi vị trí này là I_2, $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên $(\alpha) \parallel BE$ và $(\alpha) \parallel SO$.

- $(\alpha) \parallel BE$ nên (α) cắt $(BEDC)$ theo giao tuyến M_2N_2 đi qua I_2 và $M_2N_2 \parallel BE$ ($M_2 \in BC$, $N_2 \in ED$).

- $(\alpha) \parallel SO$ nên (α) cắt (SOC) theo giao tuyến QI_2 đi qua I_2 và song song với SO ($Q \in SC$).

Do $(\alpha) \parallel CD$ (vì $CD \parallel BE$) nên (α) sẽ cắt hai mặt phẳng $(BEDC)$ và (SDC) theo hai giao tuyến M_2N_2, PQ cùng song song với CD ($P \in SD$).

Ta có thiết diện là hình thang M_2N_2PQ.

Trường hợp 3. $I \equiv O$.

Dễ thấy thiết diện là tam giác SBE.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

2.23. Từ bốn đỉnh của hình bình hành $ABCD$ vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz và Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C' và D'.

a) Chứng minh rằng $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.

b) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì ?

c) Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.

2.24. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $M'N' \parallel DF$.

c) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$ và $MN \parallel (DEF)$.

2.25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên là AA', BB', CC'. Gọi I và I' tương ứng là trung điểm của hai cạnh BC và $B'C'$.

a) Chứng minh rằng $AI \parallel A'I'$.

b) Tìm giao điểm của IA' với mặt phẳng $(AB'C')$.

c) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC)$.

2.26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

a) Chứng minh rằng $CB' \parallel (AHC')$.

b) Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ và (ABC).

2.27. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm di động tương ứng trên AD và BE sao cho

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}.$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy chỉ ra mặt phẳng cố định đó.

2.28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo, $AC = a$, $BD = b$, tam giác SBD đều. Gọi I là điểm di động trên đoạn AC với $AI = x$ $(0 < x < a)$. Lấy (α) là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (SBD).

a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

b) Tìm diện tích S của thiết diện ở câu a) theo a, b, x. Tìm x để S lớn nhất.

2.29. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ) song song với nhau. Hai đường thẳng a và a' cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự nói trên tại A, B, C và A', B', C'. Cho $AB = 5$, $BC = 4$, $A'C' = 18$. Tính độ dài $A'B'$, $B'C'$.

2.30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}\cdot$ Chứng minh rằng IJ luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

2.31. Cho hai tia Ax, By chéo nhau. Lấy M, N lần lượt là các điểm di động trên Ax, By. Gọi (α) là mặt phẳng chứa By và song song với Ax. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt (α) tại M'.

a) Tìm tập hợp điểm M'.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các điểm I khi $AM = BN$.