

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

3.22. (h.3.64) Theo giả thiết các mặt của hình hộp đều là hình thoi.

Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Theo tính chất của hình hộp : $BD // B'D'$, do đó $AC \perp B'D'$.

Chứng minh tương tự ta được

$$AB' \perp CD', AD' \perp CB'.$$

Hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ vuông góc với nhau khi hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

- 3.23.** (h.3.65) Hai tam giác ABC và BAD bằng nhau (c.c.c) nên có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau : $CM = DM$.

Ta có tam giác MCD cân tại M , do đó $MN \perp CD$ vì N là trung điểm của CD . Tương tự ta chứng minh được $NA = NB$ và suy ra $MN \perp AB$. Mặt phẳng (CDM) không vuông góc với mặt phẳng (ABN) vì (CDM) chứa MN vuông góc với chỉ một đường thẳng AB thuộc (ABN) mà thôi.

- 3.24.** (h.3.66) Vẽ $AH \perp (BCD)$ tại H , ta có $CD \perp AH$ và vì $CD \perp AB$ ta suy ra $CD \perp BH$. Tương tự vì $BD \perp AC$ ta suy ra $BD \perp CH$.

Vậy H là trực tâm của tam giác BCD tức là $DH \perp BC$.

Vì $AH \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp AD$.

Cách khác. Trước hết ta hãy chứng minh hệ thức :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

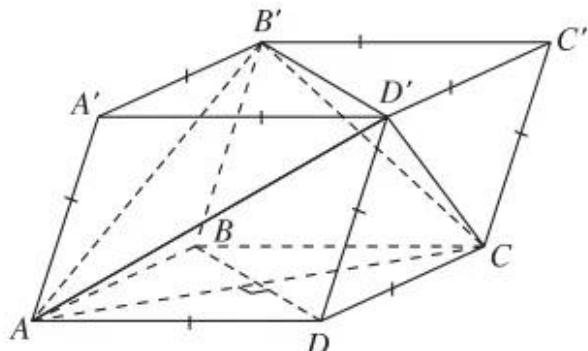
với bốn điểm A, B, C, D bất kì.

Thực vậy, ta có :

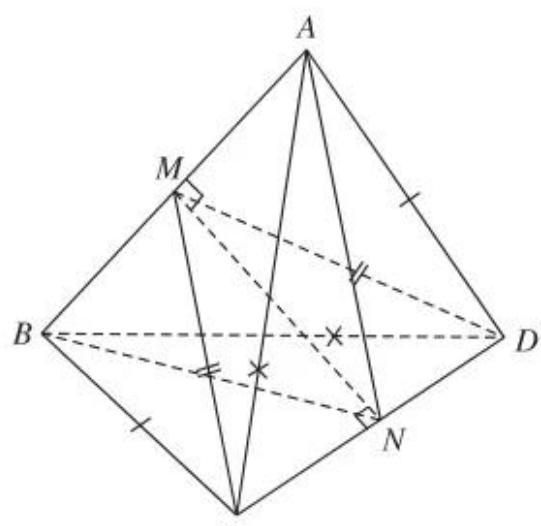
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (2)$$

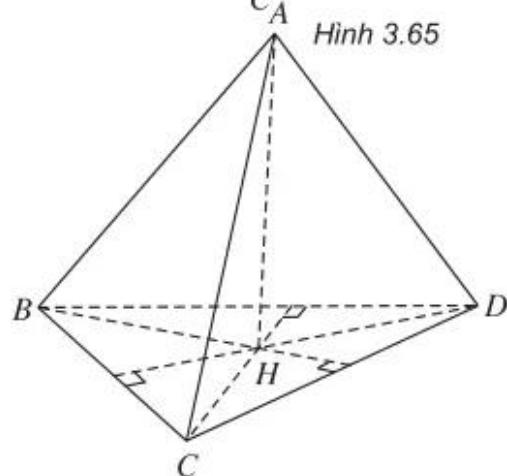
$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (3)$$



Hình 3.64



Hình 3.65



Hình 3.66

$$(1) + (2) + (3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (4)$$

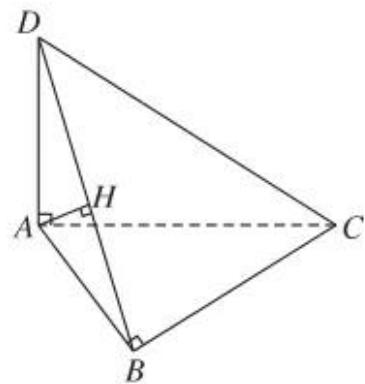
Do đó nếu $AB \perp CD$ nghĩa là $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, $AC \perp BD$ nghĩa là $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ từ hệ thức (4) ta suy ra $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, do đó $AD \perp BC$.

3.25. (h.3.67) Vì $AD \perp (ABC)$ nên $AD \perp BC$.

Ngoài ra $BC \perp AB$ nên ta có $BC \perp (ABD)$.

Vì mặt phẳng (BCD) chứa BC mà $BC \perp (ABD)$ nên ta suy ra mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABD) .

Hai mặt phẳng (BCD) và (ABD) vuông góc với nhau và có giao tuyến là BD . Đường thẳng AH thuộc mặt phẳng (ABD) và vuông góc với giao tuyến BD nên AH vuông góc với mặt phẳng (BCD) .



Hình 3.67

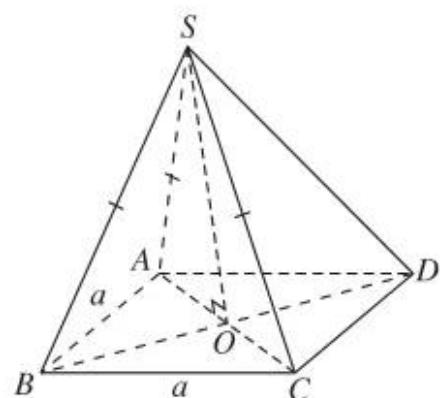
3.26. (h.3.68) a) Gọi O là tâm của hình thoi, ta có $AC \perp BD$ tại O .

Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$.

Do đó AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

Ta suy ra mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

b) Ba tam giác SAC , BAC , DAC bằng nhau (c.c.c) nên ta suy ra $OS = OB = OD$. Vậy tam giác SBD vuông tại S .

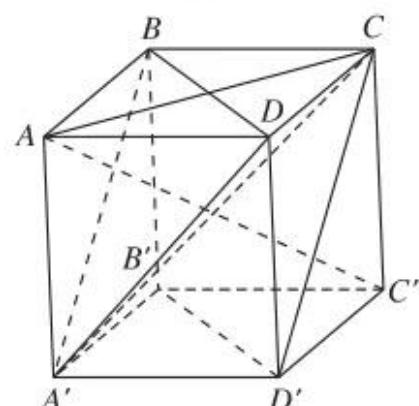


Hình 3.68

3.27. (h.3.69) a) Ta có $AB = AD = AA' = a$

và $C'B = C'D = C'A' = a\sqrt{2}$.

Vì hai điểm A và C' cách đều ba đỉnh của tam giác $A'BD$ nên A và C' thuộc trực đường tròn ngoại tiếp tam giác BDA' . Vậy $AC' \perp (BDA')$. Mặt khác, vì mặt phẳng $(ACC'A')$ chứa đường thẳng AC' mà $AC' \perp (BDA')$ nên ta suy ra mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với mặt phẳng (BDA') .



Hình 3.69

b) Ta có ACC' là tam giác vuông có cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và $CC' = a$.

Vậy $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \Rightarrow AC'^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.

Vậy $AC' = a\sqrt{3}$.

3.28. (h.3.70) a) Vì $SABC$ là hình chóp đều nên ΔABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC$. Do đó khi ta vẽ $SH \perp (ABC)$ thì H là trọng tâm của tam giác đều ABC và ta có $AH \perp BC$. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SA \perp BC$.

Chứng minh tương tự ta có $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

b) Vì $BC \perp AH$ và $BC \perp SH$ nên $BC \perp (SAH)$.

Chứng minh tương tự ta có $CA \perp (SBH)$ và $AB \perp (SCH)$.

3.29. (h.3.71) a) Gọi A' là giao điểm của AH và BC . Ta cần chứng minh ba điểm S, K, A' thẳng hàng.

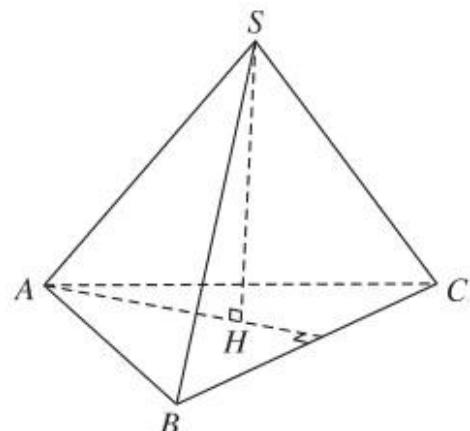
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $AA' \perp BC$. Mặt khác theo giả thiết ta có : $SA \perp (ABC)$, do đó $SA \perp BC$. Từ đó ta suy ra $BC \perp (SAA')$ và $BC \perp SA'$. Vậy SA' là đường cao của tam giác SBC nên SA' phải đi qua trực tâm K . Vậy ba đường thẳng AH, SK và BC đồng quy.

b) Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $BK \perp SC$. (1)

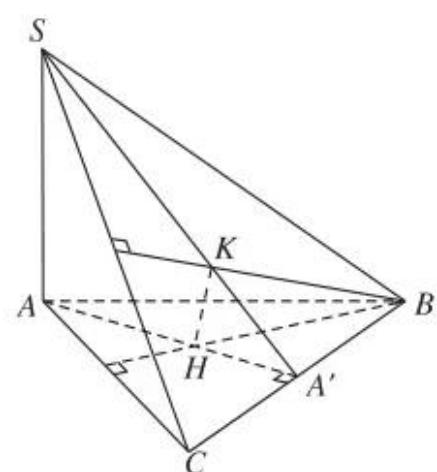
Mặt khác ta có $BH \perp AC$ vì H là trực tâm của tam giác ABC và $BH \perp SA$ vì $SA \perp (ABC)$.

Do đó $BH \perp (SAC)$ nên $BH \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (BHK)$. Vì mặt phẳng (SAC) chứa SC mà $SC \perp (BHK)$ nên ta có $(SAC) \perp (BHK)$.



Hình 3.70



Hình 3.71

c) Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp (SAA'), \text{ do đó } BC \perp HK \\ SC \perp (BHK), \text{ do đó } SC \perp HK \end{array} \right\} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

mặt phẳng (BHK) chứa HK mà $HK \perp (SBC)$ nên $(BHK) \perp (SBC)$.

3.30. (h.3.72) a) $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$

b) $AH \perp SB$ mà SB là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc là (SBC) và (SAB) nên $AH \perp (SBC)$.

c) Xét tam giác vuông SAB với đường cao AH ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\text{Vậy } AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

d) Vì $OK \perp (SBC)$ mà $AH \perp (SBC)$ nên $OK \parallel AH$, ta có K thuộc CH .

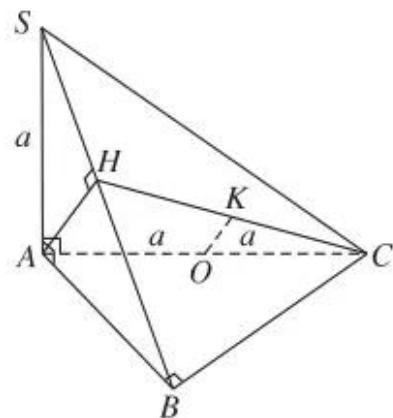
$$OK = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

3.31. (h.3.73) a) Gọi I là giao điểm của mặt phẳng (α) với cạnh SC . Ta có $(\alpha) \perp SC$, $AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI$. Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC . Trong mặt phẳng (SAC) , đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α) .

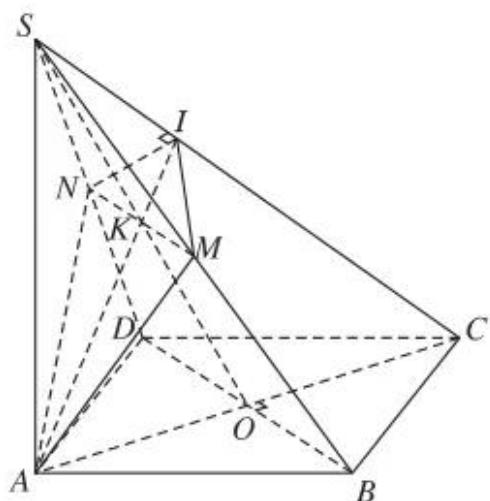
b) Ta có $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
 $\Rightarrow BD \perp SC$.

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Vì $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD \parallel (\alpha)$.



Hình 3.72



Hình 3.73

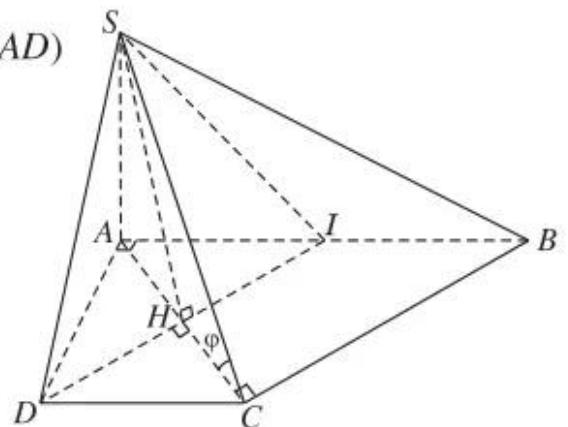
c) Ta có $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD) . Mặt phẳng (SBD) chứa $BD // (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d // BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD) . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD . Ta được thiết diện là tứ giác $AMIN$ có đường chéo AI vuông góc với SC và đường chéo MN song song với BD .

$$3.32. (h.3.74) a) \text{Ta có } \left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

$$\Rightarrow (SCD) \perp (SAD).$$

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Vì $DI // CB$ và $DI \perp AC$ nên $AC \perp CB$. Do đó $CB \perp (SAC)$.

Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.



Hình 3.74

$$b) \text{Ta có } \varphi = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \left. \begin{array}{l} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow DI \perp (SAC).$$

Vậy (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI) . Do đó thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều SDI có chiều dài mỗi cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Gọi H là tâm hình vuông $AICD$ ta có $SH \perp DI$ và $SH = \frac{DI\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tam giác SDI có diện tích :

$$S_{\triangle SDI} = \frac{1}{2} SH \cdot DI = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$