§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0°.

• Xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau :

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c. Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng đường thẳng a trong (α) vuông góc với c và dựng đường thẳng b trong (β) vuông góc với c. Khi đó góc giữa (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

• Diện tích hình chiếu của đa giác : $S' = S\cos\varphi$

(với S là diện tích đa giác nằm trong (α), S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (β), φ là góc giữa (α) và (β)).

II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.

Khi đó ta kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$ hoặc $(\beta) \perp (\alpha)$.

2. Tính chất

a) Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

c) Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

d) Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

IV. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là *hình chóp cụt đều*.

Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều đồng dạng với nhau.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp giải

– Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

– Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK).

b) Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Giải

a) Ta có : $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$.

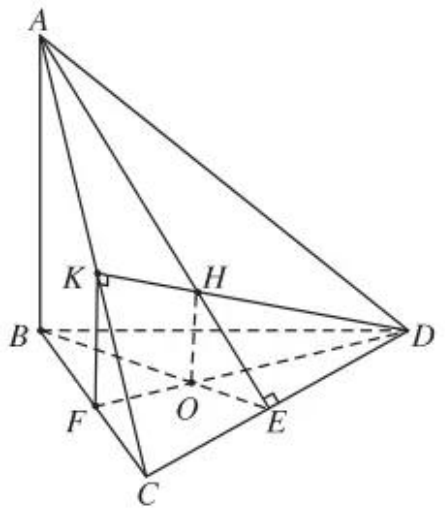
Từ đó suy ra mặt phẳng (ADC) chứa CD nên $(ADC) \perp (ABE)$.

Ta có : $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC)$.

Ta suy ra $DF \perp AC$ (h.3.29)

Ta cũng có $DK \perp AC$ vì H là trực tâm của tam giác ACD.

Do đó $AC \perp (DKF)$ và mặt phẳng (ACD) chứa AC nên $(ACD) \perp (DKF)$.



Hình 3.29

b) Vì $CD \perp (ABE)$ nên $CD \perp AE$. Ta có H là trực tâm của tam giác ACD và O là trực tâm của tam giác BCD. Hai mặt phẳng (ABE) và (DKF) có giao tuyến là đường thẳng OH. Mặt khác hai mặt phẳng (ABE) và (DKF) đều vuông góc với mặt phẳng (ACD) nên giao tuyến OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$. Cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

Giải

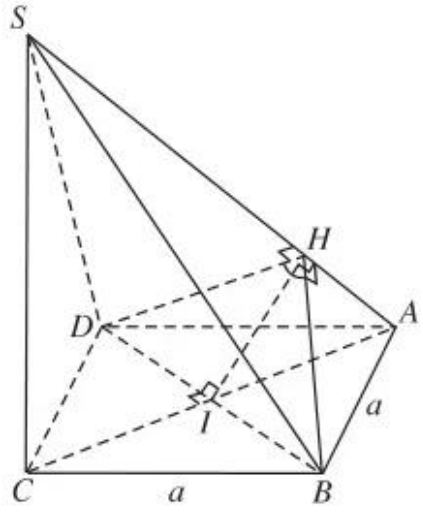
Vì $ABCD$ là hình thoi nên ta có :

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$.

Trong mặt phẳng (SAC) hạ $IH \perp SA$ tại H, ta suy ra $SA \perp (BDH)$ (vì $SA \perp BD$ và $SA \perp IH$).

Do đó $BH \perp SA$ và $DH \perp SA$ (h.3.30).

Vậy $\widehat{BHD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).



Hình 3.30

Hai tam giác vuông AHI và ACS có góc nhọn A chung nên đồng dạng :

Do đó $\frac{IH}{AI} = \frac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SC}{AS}$. (1)

Vì $BD = a$ nên ABD là tam giác đều, do đó

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}.$$

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

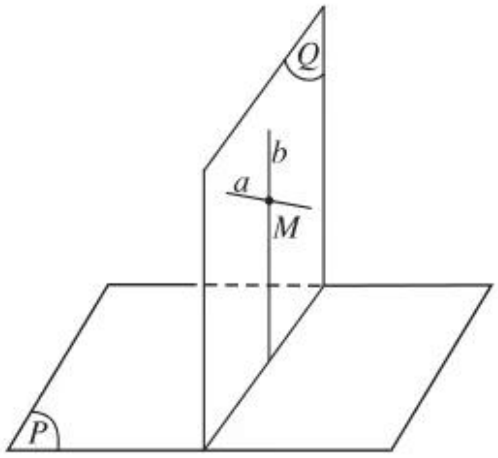
Thay các giá trị của AI, SC, SA vào (1) ta được : $IH = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$.

Tam giác BHD có trung tuyến IH ứng với cạnh BD bằng $\frac{BD}{2}$ nên đó là tam giác vuông tại H hay $\widehat{BHD} = 90^o$.

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

VẤN ĐỀ 2

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Hãy xác định mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với (P).



Hình 3.31

1. Phương pháp giải

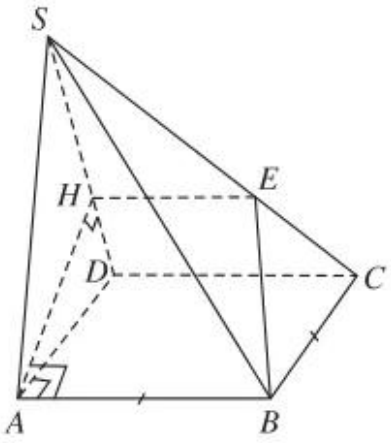
Từ một điểm M thuộc a, dựng đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) ta có $(Q) = (a, b)$ (h.3.31)

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A lấy điểm S. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc

với mặt phẳng (SCD). Hãy xác định mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì ?

Giải



Hình 3.32

Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H (h.3.32). Ta có :

$$\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp DC \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SDC).$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH trong đó AH vuông góc với mặt phẳng (SDC). Vậy $(\alpha) \perp (SDC)$ và $(\alpha) = (AB, AH)$.

Ta có $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E. Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.22. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$ và $AD' \perp CB'$. Khi nào mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt phẳng $(BB'D'D)$?

3.23. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cặp cạnh đối diện bằng nhau là $AB = CD$, $AC = BD$ và $AD = BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$. Mặt phẳng (CDM) có vuông góc với mặt phẳng (ABN) không ? Vì sao ?

3.24. Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ thì $AD \perp BC$.

3.25. Cho tam giác ABC vuông tại B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Từ điểm A trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ AH vuông góc với BD, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3.26. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh :

a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) ;

b) Tam giác SBD là tam giác vuông tại S.

3.27. a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

b) Tính đường chéo AC' của hình lập phương đã cho.

3.28. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Chứng minh

a) Mỗi cạnh bên của hình chóp đó vuông góc với cạnh đối diện ;

b) Mỗi mặt phẳng chứa một cạnh bên và đường cao của hình chóp đều vuông góc với cạnh đối diện.

3.29. Tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK và BC đồng quy.

b) SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và $(SAC) \perp (BHK)$.

c) HK vuông góc với mặt phẳng (SBC) và $(SBC) \perp (BHK)$.

3.30. Tứ diện $SABC$ có ba đỉnh A, B, C tạo thành tam giác vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Trong mặt phẳng (SAB) vẽ AH vuông góc với SB tại H, chứng minh $AH \perp (SBC)$.

c) Tính độ dài đoạn AH.

d) Từ trung điểm O của đoạn AC vẽ OK vuông góc với (SBC) cắt (SBC) tại K. Tính độ dài đoạn OK.

3.31. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cạnh SC, (α) cắt SC tại I.

a) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α).

b) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD \parallel (\alpha)$.

c) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α). Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α).

3.32. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (SDC), mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SCB).

b) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$, tính $\tan\varphi$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Hãy xác định (α) và xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (α).