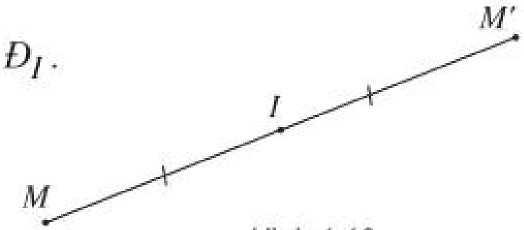
# §4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

## A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm $I$. Phép biến hình biến điểm $I$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ khác $I$ thành $M'$ sao cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $MM'$ được gọi là *phép đối xứng tâm I*.

Phép đối xứng tâm $I$ thường được kí hiệu là $Đ_I$.



Hình 1.10

Từ định nghĩa ta suy ra :

1) $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

Từ đó suy ra :

- Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$.
- Nếu $M \not\equiv I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung điểm của $MM'$.

2) Điểm $I$ được gọi là *tâm đối xứng* của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm $I$ biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathscr{H}$ được gọi là *hình có tâm đối xứng*.

### II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $I = (x_0 ; y_0)$, gọi $M = (x ; y)$ và $M' = (x' ; y')$ là ảnh của $M$ qua phép đối xứng tâm $I$. Khi đó

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases}$$

### III. CÁC TÍNH CHẤT

Phép đối xứng tâm

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;

2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho ;

3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;

4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

## B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

### Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép đối xứng tâm

***1. Phương pháp giải***

Dùng định nghĩa, biểu thức toạ độ hoặc tính chất của phép đối xứng tâm.

***2. Ví dụ***

***Ví dụ.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ cho điểm $I(2\ ;\ -3)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $3x + 2y - 1 = 0$. Tìm toạ độ của điểm $I'$ và phương trình của đường thẳng $d'$ lần lượt là ảnh của $I$ và đường thẳng $d$ qua phép đối xứng tâm $O$.

*Giải*

$I' = (-2\ ;\ 3)$.

Để tìm $d'$ ta có thể làm theo các cách sau :

*Cách 1*. Từ biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ ta có

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y'. \end{cases}$$

Thay biểu thức của $x$ và $y$ vào phương trình của $d$ ta được

$3(-x') + 2(-y') - 1 = 0$, hay $3x' + 2y' + 1 = 0$. Do đó phương trình của $d'$ là $3x + 2y + 1 = 0$.

*Cách 2*. Vì $d'$ song song hoặc trùng với $d$ nên phương trình của $d'$ có dạng $3x + 2y + C = 0$. Lấy điểm $M(0\ ;\ \frac{1}{2})$ thuộc $d$, thì ảnh của nó là $M' = (0\ ;\ -\frac{1}{2})$.

Vì $M'$ thuộc $d'$ nên $-2\cdot\frac{1}{2} + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 1$.

*Cách 3*. Ta cũng có thể lấy hai điểm $M$, $N$ thuộc $d$. Tìm ảnh $M'$, $N'$ tương ứng của chúng. Khi đó $d'$ chính là đường thẳng $M'N'$.

### Vấn đề 2

Tìm tâm đối xứng của một hình

### 1. Phương pháp giải

Nếu hình đã cho là một đa giác thì sử dụng tính chất : Một đa giác có tâm đối xứng $I$ thì qua phép đối xứng tâm $I$ mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác song song và bằng cạnh ấy.

Nếu hình đã cho không phải là một đa giác thì sử dụng định nghĩa.

### 2. Ví dụ

***Ví dụ 1.*** Chứng minh rằng trong phép đối xứng tâm $I$ nếu điểm $M$ biến thành chính nó thì $M$ phải trùng với $I$.

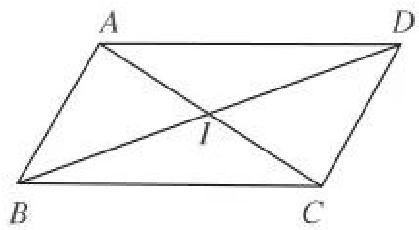
**Giải**

Ta có $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM} \Rightarrow 2\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv I$.

***Ví dụ 2.*** Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là một hình bình hành.

**Giải**

Giả sử tứ giác $ABCD$ có tâm đối xứng là $I$. Qua phép đối xứng tâm $I$, tứ giác $ABCD$ biến thành chính nó nên đỉnh $A$ chỉ có thể biến thành $A$, $B$, $C$ hay $D$.



*Hình 1.11*

– Nếu đỉnh $A$ biến thành chính nó thì theo ví dụ trên $A$ trùng $I$. Khi đó tứ giác có hai đỉnh đối xứng qua đỉnh $A$. Điều đó vô lí.

– Nếu $A$ biến thành $B$ hoặc $D$ thì tâm đối xứng thuộc các cạnh $AB$ hoặc $AD$ của tứ giác nên cũng suy ra điều vô lí.

Vậy $A$ chỉ có thể biến thành đỉnh $C$.

Lí luận tương tự đỉnh $B$ chỉ có thể biến thành đỉnh $D$. Khi đó tâm đối xứng $I$ là trung điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$ nên tứ giác $ABCD$ phải là hình bình hành.

## VẤN ĐỀ 3

Dùng phép đối xứng tâm để giải một số bài toán hình học.

### 1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất của phép đối xứng tâm.

Để dựng một điểm $M$ ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng tâm, hoặc xem điểm $M$ như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép đối xứng tâm.

***2. Ví dụ***

***Ví dụ.*** Cho góc nhọn $xOy$ và một điểm $A$ thuộc miền trong của góc đó.

a) Hãy tìm một đường thẳng đi qua $A$ và cắt $Ox$, $Oy$ theo thứ tự tại hai điểm $M$, $N$ sao cho $A$ là trung điểm của $MN$.

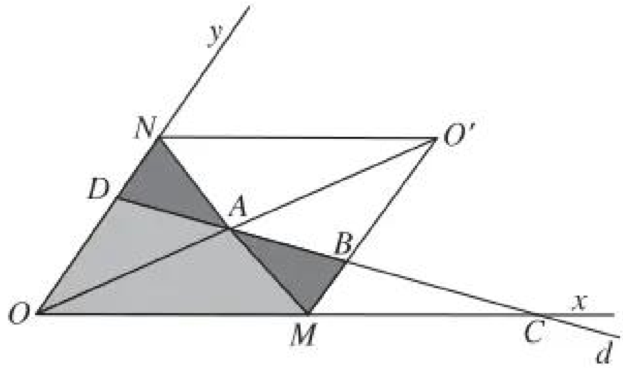
b) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng bất kì qua $A$ cắt $Ox$ và $Oy$ lần lượt tại $C$ và $D$ thì ta luôn có diện tích tam giác $OCD$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác $OMN$.

***Giải***

a) Giả sử $M$, $N$ đã dựng được (h.1.12). Gọi $O'$ là ảnh của $O$ qua phép đối xứng qua tâm $A$. Khi đó tứ giác $OMO'N$ là hình bình hành. Từ đó suy ra cách dựng :

– Dựng $O'$ là ảnh của $O$ qua phép đối xứng qua tâm $A$.

– Dựng hình bình hành $OMO'N$ sao cho $M$, $N$ lần lượt thuộc $Ox$, $Oy$. Dễ thấy đường thẳng $MN$ đi qua $A$ và $AM = AN$. Do đó đường thẳng $MN$ là đường thẳng cần tìm.



Hình 1.12

b) Giả sử đường thẳng $d$ bất kì đi qua $A$ cắt $O'M$, $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $B$, $C$, $D$ ($C$ thuộc tia $Mx$). Do phép đối xứng qua tâm $A$ biến đường thẳng $O'M$ thành đường thẳng $Oy$, nên nó biến $B$ thành $D$. Từ đó suy ra $\Delta ABM = \Delta ADN$.

Do đó diện tích $\Delta OMN$ = diện tích tứ giác $OMBD \le$ diện tích $\Delta OCD$.

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**1.11.** Cho tứ giác $ABCE$. Dựng ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng tâm $E$.

**1.12.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $I(1\ ;\ 2)$, $M(-2\ ;\ 3)$, đường thẳng $d$ có phương trình $3x - y + 9 = 0$ và đường tròn $(C)$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0.$$

Hãy xác định toạ độ của điểm $M'$, phương trình của đường thẳng $d'$ và đường tròn $(C')$ theo thứ tự là ảnh của $M$, $d$ và $(C)$ qua

a) Phép đối xứng qua gốc toạ độ ;

b) Phép đối xứng qua tâm $I$.

**1.13.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d$ có phương trình : $x - 2y + 2 = 0$ và $d'$ có phương trình : $x - 2y - 8 = 0$. Tìm phép đối xứng tâm biến $d$ thành $d'$ và biến trục $Ox$ thành chính nó.

**1.14.** Cho ba điểm không thẳng hàng $I, J, K$. Hãy dựng tam giác $ABC$ nhận $I, J, K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC$, $AB$, $AC$.