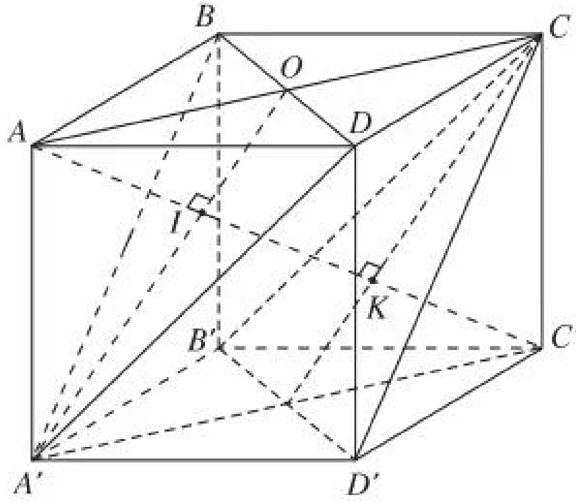
§5. KHOẢNG CÁCH

3.33. (h.3.75) Điểm A cách đều ba đỉnh của tam giác đều $A'BD$ vì ta có $AB = AD = AA' = a$, điểm C' cũng cách đều ba đỉnh của tam giác đều đó vì ta có :

$$C'B = C'D = C'A' = a\sqrt{2}.$$

Vậy AC' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$, tức là đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$ tại trọng tâm I của tam giác $A'BD$. Ta cần tìm khoảng cách $A'I$.



Hình 3.75

Ta có $A'I = BI = DI = \frac{2}{3}\ A'O$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

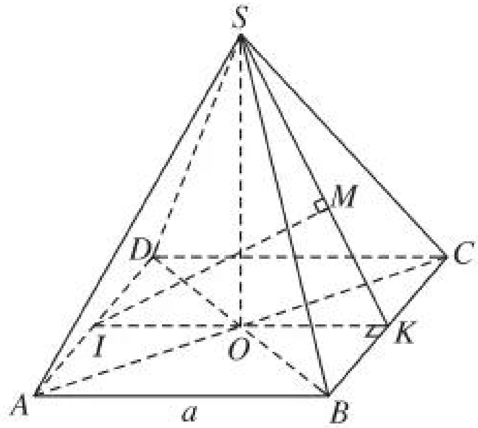
Ta lại có $A'O = BD\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$= a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$$

Vậy $A'I = \dfrac{2}{3}A'O\ = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot$

Tương tự điểm C' cách đều ba đỉnh của tam giác đều $CB'D'$, tính được khoảng cách từ C, B', D' tới đường chéo AC'.

3.34. (h.3.76) a) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, dễ thấy I, O, K thẳng hàng. Vì K là trung điểm của BC nên $SK \perp BC$.



Hình 3.76

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp SK \\ BC \perp OK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIK)$.

Do đó $(SBC) \perp (SIK)$.

b) Hai đường thẳng AD và SB chéo nhau. Ta có mặt phẳng (SBC) chứa SB và song song với AD. Do đó khoảng cách giữa AD và SB bằng khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC). Khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SBC).

Theo câu a) ta có $(SIK) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SK và khoảng cách cần tìm là IM, trong đó M là chân đường vuông góc hạ từ I tới SK. Dựa vào hệ thức $IM.SK = SO.IK$, ta có $IM = \dfrac{SO.IK}{SK}\cdot$

Ta lại có : $SK^2 = SB^2 - BK^2 = 2a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow SK = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

và $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 2a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$

Do đó $IM = \dfrac{SO.IK}{SK} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a : \dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}\cdot$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là bằng $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}\cdot$

3.35. (h.3.77) a) Ta có $B'C \perp BC'$ vì đây là hai đường chéo của hình vuông $BB'C'C$.

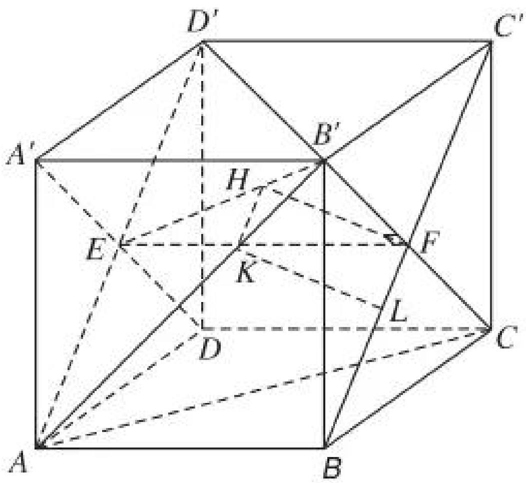
Ngoài ra ta còn có : $A'B' \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'B' \perp BC'$.

Từ đó ta suy ra $BC' \perp (A'B'CD)$ vì mặt phẳng $(A'B'CD)$ chứa đường thẳng $A'B'$ và $B'C$ cùng vuông góc với BC'.

b) Mặt phẳng $(AB'D')$ chứa đường thẳng AB' và song song với BC', ta hãy tìm hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$. Gọi E, F lần lượt là tâm các hình vuông $ADD'A'$, $BCC'B'$. Kẻ $FH \perp EB'$ với $H \in EB'$, khi đó FH nằm trên mặt phẳng $(A'B'CD)$ nên theo câu a) thì $FH \perp BC'$ hay $FH \perp AD'$. Vậy $FH \perp (AB'D')$, do đó hình chiếu BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$ là đường thẳng đi qua H và song song với BC'. Giả sử đường thẳng đó cắt AB' tại K thì từ K vẽ đường thẳng song song với HF cắt BC' tại L. Khi đó KL là đoạn vuông góc chung cần dựng. Tam giác $B'EF$ vuông tại F nên từ công thức

$\dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{FE^2} + \dfrac{1}{FB'^2}$ ta tính được

$KL = FH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

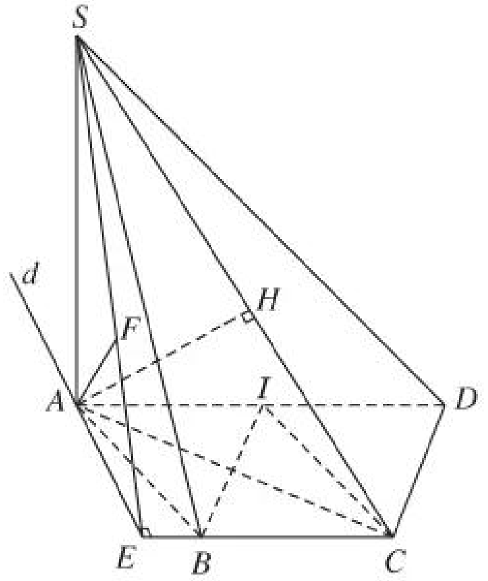


Hình 3.77

Nhận xét. Độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(AB'D')$ và $(BC'D)$ lần lượt chứa hai đường thẳng đó. Khoảng cách này bằng $\frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

3.36. (h.3.78) a) Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ nên ta có : $AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = a$, đồng thời $AC \perp CD$, $AB \perp BD$, $AC = BD = a\sqrt{3}$.

Như vậy $\left.\begin{array}{l} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.



Hình 3.78

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AH \perp SC$ tại H ta có $AH \perp CD$ và $AH \perp SC$ nên $AH \perp (SCD)$.

Vậy $AH = d(A, (SCD))$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có AH là đường cao, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$= \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot$$

Vậy $AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $BI \parallel CD$ nên BI song song với mặt phẳng (SCD). Từ đó suy ra $d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$.

Mặt khác AI cắt (SCD) tại D nên

$$d(I, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Do đó : $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

b) Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$, do đó $d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Dựng $Ad \perp BC$ tại $E \Rightarrow BC \perp (SAE)$.

Dựng $AF \perp SE$ tại F ta có : $\begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAE)) \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC).$

Vậy $AF = d(A, (SBC)) = d(AD, (SBC))$.

Xét tam giác vuông AEB ta có : $AE = AB \sin \widehat{ABE} = a \sin 60^{\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

Xét tam giác SAE vuông tại A ta có :

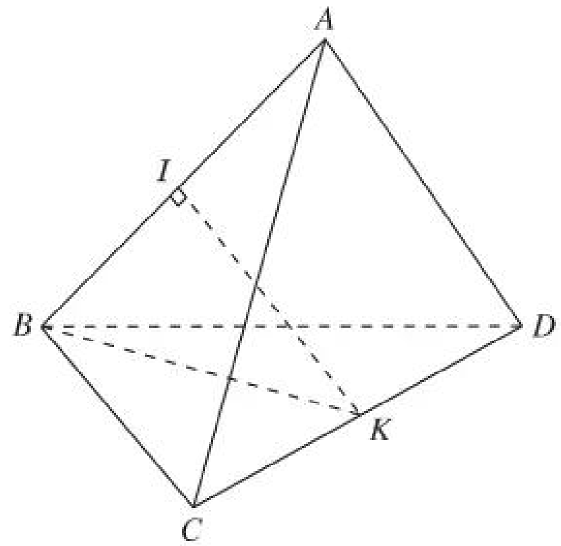
$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{9}{6a^2}.$$

Do đó $AF^2 = \dfrac{6a^2}{9} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(AD, (SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot$

3.37. (h.3.79) Giả thiết cho $ABCD$ là tứ diện đều nên các cặp cạnh đối diện của tứ diện đó có vai trò như nhau. Do đó ta chỉ cần tính khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD là đủ.

Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Dễ thấy IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD nên nó chính là khoảng cách giữa AB và CD.



Hình 3.79

Tam giác BKI vuông tại I. Ta có :

$$IK^2 = BK^2 - BI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}\cdot$$

Vậy $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

3.38. (h.3.80) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD, ta có IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD và độ dài đoạn IK là khoảng cách cần tìm :

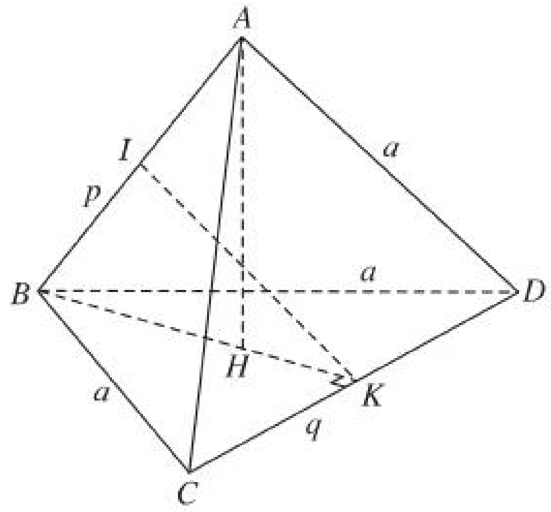
$$IK^2 = BK^2 - BI^2 = BK^2 - \frac{p^2}{4}$$

mà $BK^2 = BC^2 - CK^2 = a^2 - \frac{q^2}{4}\cdot$

Vậy $IK^2 = a^2 - \frac{p^2 + q^2}{4}\cdot$

Do đó $IK = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)}$

với điều kiện $4a^2 - (p^2 + q^2) > 0$.



Hình 3.80

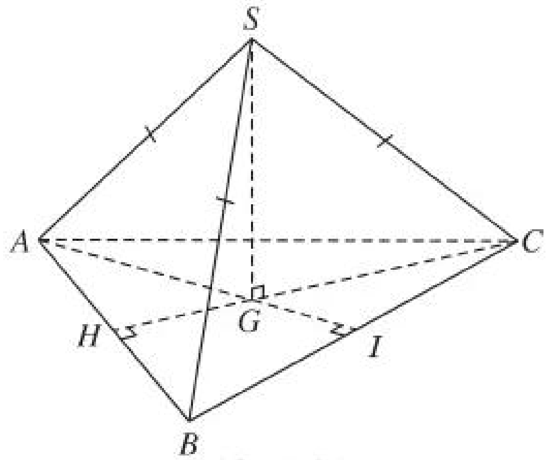
3.39. (h.3.81) a) SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên $SG \perp (ABC)$. Ta có

$$SG^2 = SA^2 - AG^2$$

$$= (2a)^2 - \left[\frac{2}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2$$

$$= 4a^2 - 3a^2 = a^2.$$

Vậy khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC) là độ dài của đoạn $SG = a$.



Hình 3.81

b) Ta có $CG \perp AB$ tại H. Vì GH là đoạn vuông góc chung của AB và SG, do đó $HG = \frac{1}{3}\ HC$ mà $HC\ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$ nên $HG = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

3.40. (h.3.82) a) Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$. Theo giả thiết ta có $AI \perp (A'B'C')$ và $\widehat{AA'I} = 60^{\circ}$. Ta biết rằng hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách AI.

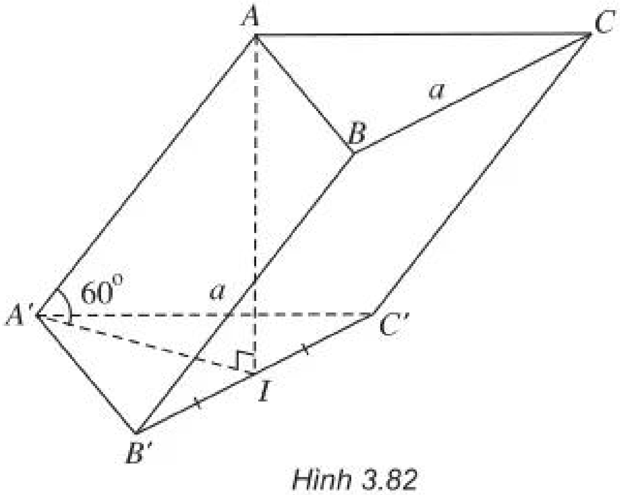
Do đó $AI = AA'.\sin 60^{\circ} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

b) $\left.\begin{array}{l} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp AI \end{array}\right\} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

$\Rightarrow B'C' \perp AA'$.

Mà $AA' \mathbin{/\!/} BB' \mathbin{/\!/} CC'$ nên $B'C' \perp BB'$.

Vậy mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông vì nó là hình thoi có một góc vuông.



Hình 3.82