§5. KHOẢNG CÁCH

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Cho một điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu của O trên a. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a, kí hiệu là $d(O, a)$.

2. Khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (α) là khoảng cách giữa hai điểm O và H, với H là hình chiếu vuông góc của O lên (α), kí hiệu là $d(O, (\alpha))$.

3. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α), kí hiệu là $d(a, (\alpha))$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β), kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) \text{ với } M \in (\alpha)$$

$$d((\alpha), (\beta)) = d(N, (\alpha)) \text{ với } N \in (\beta).$$

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài của đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

II. LƯU Ý

1. Tính khoảng cách có thể áp dụng trực tiếp định nghĩa hoặc tính gián tiếp, chẳng hạn có thể tính được đường cao của một tam giác (khoảng cách từ đỉnh tới đáy) nếu biết diện tích và số đo độ dài cạnh đáy của tam giác đó.

2. Trước khi tính toán, cần xác định rõ yếu tố cần tính khoảng cách.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng m cho trước

1. Phương pháp giải

– Trong mặt phẳng xác định bởi điểm M và đường thẳng m ta vẽ $MH \perp m$ tại H. Ta có $d(M, m) = MH$. Ta có thể sử dụng các kết quả của hình học phẳng để tính độ dài đoạn MH.

– Trong không gian dựng mặt phẳng (α) đi qua M và (α) vuông góc với m cắt m tại H, ta có $d(M, m) = MH$. Sau đó tính độ dài đoạn MH.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

a) Chứng minh đường thẳng IO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

Giải

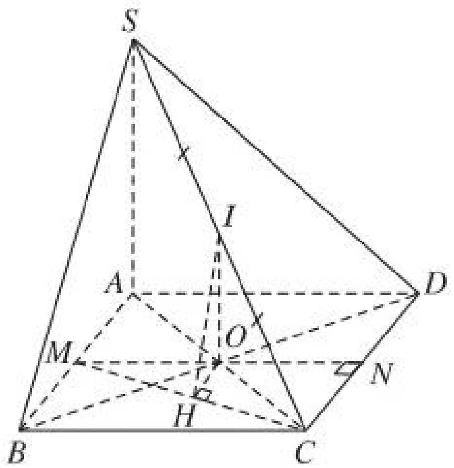
a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ mà $IO \parallel SA$ do đó $IO \perp (ABCD)$ (h.3.33).

b) Trong mặt phẳng (ICM) ta dựng $IH \perp CM$ $(H \in CM)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $OH \perp CM$, ta có $IH \perp CM$ và IH chính là khoảng cách từ I đến đường thẳng CM.

Gọi N là giao điểm của MO với cạnh CD. Hai tam giác vuông MHO và MNC đồng dạng nên $\dfrac{OH}{CN} = \dfrac{OM}{MC}$.

Do đó $OH = \dfrac{CN.OM}{MC} = \dfrac{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$.

Ta còn có $IO = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$



Hình 3.33

và $IH^2 = IO^2 + OH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{20} = \dfrac{3a^2}{10}$.

Vậy khoảng cách $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $AO = 4$ cm. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

Giải

Ta dựng $AH \perp BC$ tại H (h.3.34).

Theo công thức Hê-rông diện tích S của tam giác ABC là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

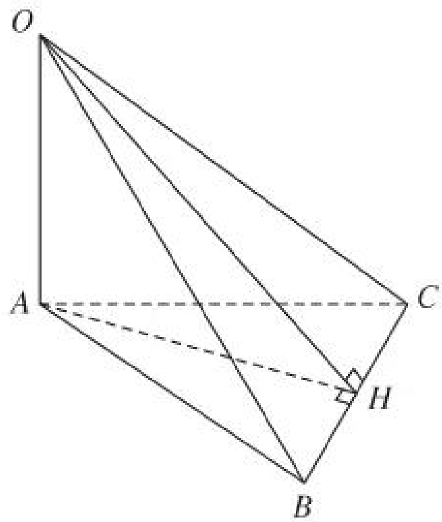
$$= \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

$$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

Vì $AH \perp BC$ nên $OH \perp BC$ theo định lí ba đường vuông góc.

Ta suy ra $OH^2 = OA^2 + AH^2 = 16 + 48 = 64$.

Vậy $OH = 8$ cm.



Hình 3.34

VẤN ĐỀ 2

Tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α)

1. Phương pháp giải

Dựng $MH \perp (\alpha)$ với $H \in (\alpha)$ và tính MH.

2. Ví dụ

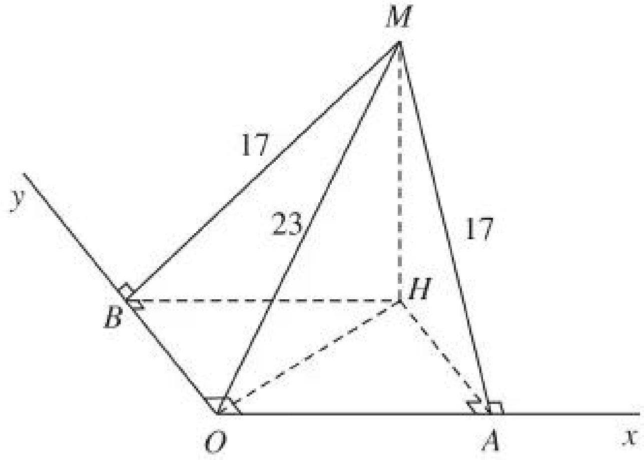
Ví dụ 1. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc vuông. Khoảng cách từ M đến đỉnh O của góc vuông bằng 23 cm và khoảng cách từ M tới hai cạnh Ox và Oy đều bằng 17 cm. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng chứa góc vuông.

Giải

Gọi A và B lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy (h.3.35).

Ta có $MO = 23$ cm, $MA = MB = 17$ cm. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (OAB).

Cần tính khoảng cách MH từ M đến mặt phẳng (OAB).



Hình 3.35

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $HA \perp OA$ và $HB \perp OB$. Do đó tứ giác $OAHB$ là hình chữ nhật. Mặt khác vì $MA = MB = 17$cm nên $HA = HB$. Vậy tứ diện $OAHB$ là hình vuông. Đặt $OA = x$ ta có $OH = x\sqrt{2}$. Do đó

$$MH^2 = MO^2 - OH^2 = MA^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow 23^2 - 2x^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 240.$$

Vậy $MH^2 = 17^2 - 240 = 49$ nên $MH = 7$cm.

Ví dụ 2. Tam giác ABC vuông tại A, có cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (α), cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với (α) một góc 60°.

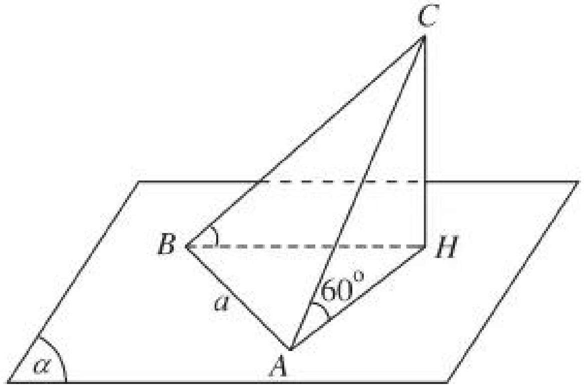
a) Tính khoảng cách CH từ C tới (α).

b) Chứng minh rằng cạnh BC tạo với (α) một góc $\varphi = 45^\circ$.

Giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên (α). Theo giả thiết ta có $\widehat{CAH} = 60^\circ$, do đó

$$CH = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ (h.3.36).}$$



Hình 3.36

b) Ta có $\widehat{CBH}$ là góc của cạnh BC tạo với mặt phẳng (α).
Vì $BA \perp CA$ nên :

$BC^2 = BA^2 + AC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

$$\sin\widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\widehat{CBH} = 45^{\circ}$.

Vấn đề 3

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

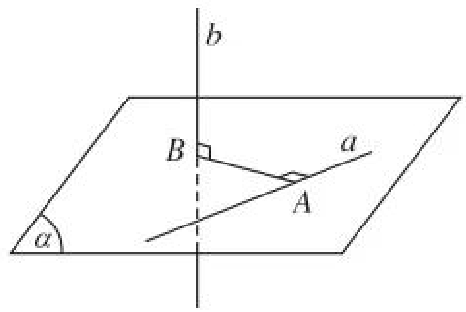
1. Phương pháp giải

Ta có các trường hợp sau đây :

a) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

– Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.

– Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b (h.3.37).

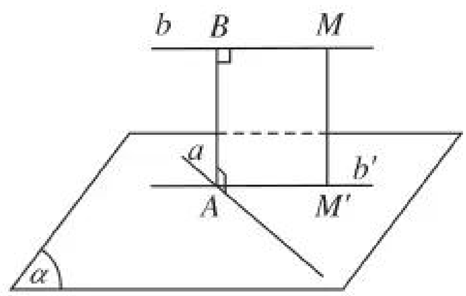


Hình 3.37

b) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

Cách 1 :

– Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b (h.3.38).



Hình 3.38

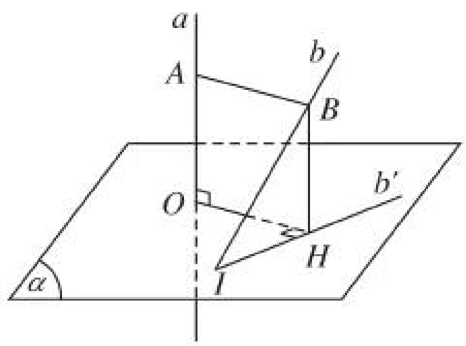
– Lấy một điểm M tuỳ ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.

– Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A.

– Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 2 :

– Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I (h.3.39)



Hình 3.39

– Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).

– Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$, $H \in b'$.

– Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B

– Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A

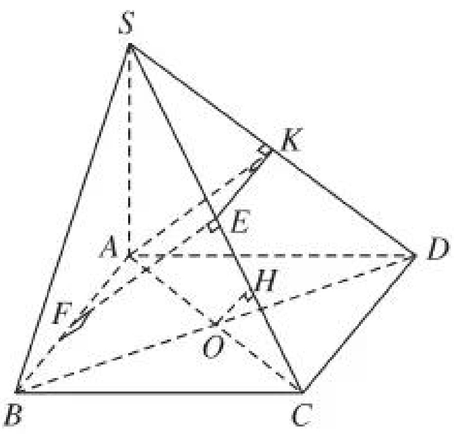
Độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của :

a) SB và CD ; b) SC và BD ; c) SC và AB.

Giải



Hình 3.40

a) Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$.

Mặt khác $BC \perp CD$. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD. Khoảng cách giữa SB và CD là đoạn $BC = a$ (h.3.40).

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC) từ O hạ $OH \perp SC$ tại H ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ vì $BD \perp (SAC)$. Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin\widehat{ACS}$. Vậy $OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$.

c) Ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Trong mặt phẳng (SAD) ta có SD là hình chiếu vuông góc của SC, ta vẽ $AK \perp SD$ tại K. Trong mặt phẳng (SCD) vẽ $KE \parallel CD$ với $E \in SC$.

Trong mặt phẳng (KE, AB) vẽ $EF \parallel AK$ với $F \in AB$. Ta có AB và CD cùng vuông góc với mặt phẳng (SAD) nên $AB \perp AK$ và $CD \perp AK$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$

Vậy $AK \perp AB$ và $AK \perp SC$. Vì $EF \parallel AK$ nên $EF \perp AB$ và $EF \perp SC$.

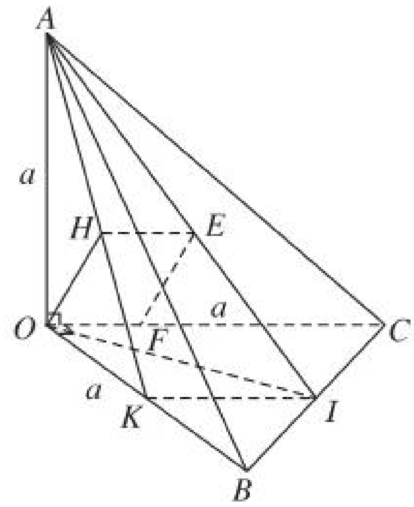
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có $EF = AK = \dfrac{AS.AD}{SD} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng :

a) OA và BC ;   b) AI và OC.

Giải



Hình 3.41

a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC (h.3.41).

Ta có $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta lại có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$ tại O.

Từ I vẽ $IK \parallel OC$ thì IK vuông góc với mặt phẳng (OAB) tại trung điểm K của đoạn OB. Ta có AK là hình chiếu vuông góc của AI trên mặt phẳng (OAB).

Trong mặt phẳng (OAB) vẽ $OH \perp AK$. Dựng $HE \parallel OC$ với $E \in AI$ và dựng $EF \parallel OH$ với $F \in OC$. Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC.

Ta có $EF = OH$.

Trong tam giác vuông OAK ta có : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

Vậy $OH^2 = \dfrac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = EF$.

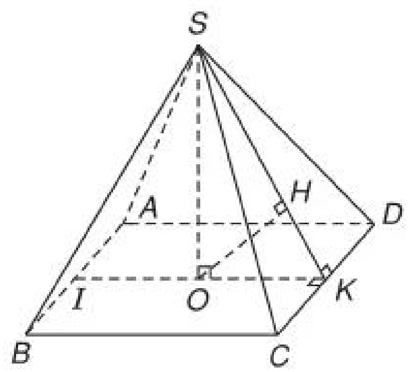
Khoảng cách giữa AI và OC là $EF = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}\cdot$

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có $SO = a$.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB chéo nhau.

Giải

Vì $AB \,//\, CD$ nên $AB \,//\, (SCD)$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB chéo nhau bằng khoảng cách giữa AB và mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB (h.3.42).



Hình 3.42

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD thì ta có O là trung điểm của IK và $IK \perp CD$. Do đó :

$d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOK)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SOK)$ với $SK = (SCD) \cap (SOK)$.

Trong tam giác vuông SOK ta có $OH \perp SK$ nên $OH \perp (SCD)$, do đó

$$OH = d(O, (SCD)).$$

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}\cdot$

Do đó $OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}\cdot$

Vậy $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}\cdot$

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm A', B, D; C, B', D' tới đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

3.34. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh mặt phẳng (SIK) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

3.35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh đường thẳng BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$.

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

3.36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

3.37. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a.

3.38. Tính khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD của hình tứ diện $ABCD$ biết rằng $AC = BC = AD = BD = a$ và $AB = p$, $CD = q$.

3.39. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC.

a) Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng đáy (ABC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SG.

3.40. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt phẳng đáy góc 60^{o} và hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ.

b) Chứng minh rằng mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông.