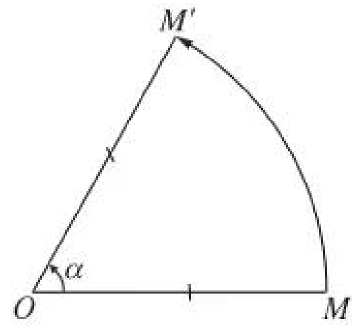
§5. PHÉP QUAY

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM\ ;\ OM')$ bằng α được gọi là *phép quay tâm O góc* α (h.1.13).



Hình 1.13

Điểm O được gọi là *tâm quay*, α được gọi là *góc quay*.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

Nhận xét

– Phép quay tâm O góc quay $\alpha = (2k+1)\pi$ với k nguyên, chính là phép đối xứng tâm O.

– Phép quay tâm O góc quay $\alpha = 2k\pi$ với k nguyên, chính là phép đồng nhất.

II. TÍNH CHẤT

Phép quay

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;

2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng ;

3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;

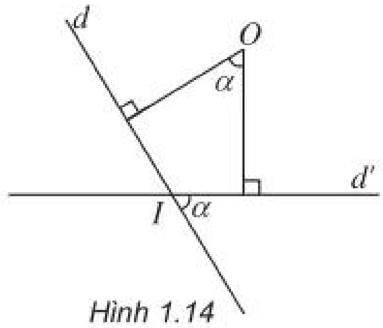
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;

5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

+ ***Chú ý.*** Giả sử phép quay tâm I góc α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' (h.1.14). Khi đó

– Nếu $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α ;

– Nếu $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



Hình 1.14

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

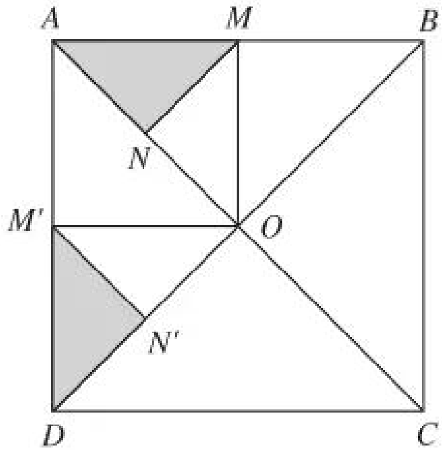
Xác định ảnh của một hình qua một phép quay

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa của phép quay.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (h.1.15). M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc 90^{o}.



Hình 1.15

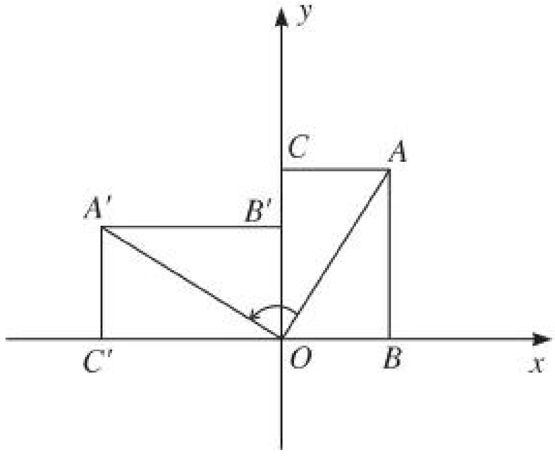
Giải

Phép quay tâm O góc 90^{o} biến A thành D, biến M thành M' là trung điểm của AD, biến N thành N' là trung điểm của OD. Do đó nó biến tam giác AMN thành tam giác $DM'N'$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(3\ ;\ 4)$. Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^{o}.

Giải

Gọi các điểm $B(3\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy (h.1.16). Phép quay tâm O góc 90^{o} biến hình chữ nhật $OBAC$ thành hình chữ nhật $OB'A'C'$. Dễ thấy $B' = (0\ ;\ 3)$, $C' = (-4\ ;\ 0)$. Từ đó suy ra $A' = (-4\ ;\ 3)$.



Hình 1.16

VẤN ĐỀ 2

Sử dụng phép quay để giải một số bài toán chứng minh hình học

1. Phương pháp giải

Chọn tâm quay và góc quay thích hợp rồi sử dụng tính chất của phép quay. Lưu ý đến chú ý nói ở mục A.II.

2. Ví dụ

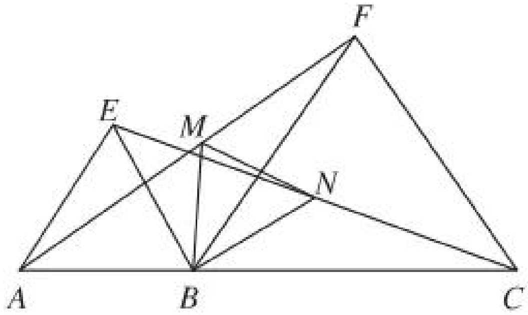
Ví dụ. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C, điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

a) Chứng minh rằng $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^{o}.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC, chứng minh tam giác BMN đều.

Giải

a) Gọi $Q_{(B,60^{o})}$ là phép quay tâm B góc quay 60^{o}. $Q_{(B,60^{o})}$ biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F nên nó biến đoạn thẳng EC thành đoạn thẳng AF. Do đó $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^{o} (h.1.17).



Hình 1.17

b) $Q_{(B,60^o)}$ cũng biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF nên $BN = BM$ và $(BN , BM) = 60^o$, do đó tam giác BMN đều.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép quay để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép quay, hoặc xem M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép quay.

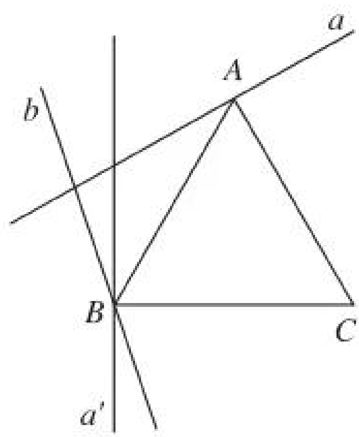
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai đường thẳng a, b và điểm C không nằm trên chúng. Hãy tìm trên a và b lần lượt hai điểm A và B sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Giải

Nếu xem B là ảnh của A qua phép quay tâm C góc quay 60^o thì B sẽ là giao của đường thẳng b với đường thẳng a' là ảnh của a qua phép quay nói trên (h.1.18).

Số nghiệm của bài toán tuỳ thuộc vào số giao điểm của đường thẳng b với đường thẳng a'.



Hình 1.18

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.15. Cho lục giác đều $ABCDEF$, O là tâm đối xứng của nó, I là trung điểm của AB.

a) Tìm ảnh của tam giác AIF qua phép quay tâm O góc 120^o.

b) Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm E góc 60^o.

1.16. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(3 ; 3)$, $B(0 ; 5)$, $C(1 ; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $5x - 3y + 15 = 0$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$ và phương trình của đường thẳng d' theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC và đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90^o.

1.17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.

1.18. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông $BCIJ$, $ACMN$, $ABEF$ và gọi O, P, Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân đỉnh D.

b) Chứng minh AO vuông góc với PQ và $AO = PQ$.