§7. PHÉP VỊ TỰ

1.23. a) Lấy hai điểm $A(0\ ;\ 4)$ và $B(2\ ;\ 0)$ thuộc d. Gọi A', B' theo thứ tự là ảnh của A và B qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$. Khi đó ta có

$$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}.$$

Vì $\overrightarrow{OA} = (0\ ;\ 4)$ nên $\overrightarrow{OA'} = (0\ ;\ 12)$. Do đó $A' = (0\ ;\ 12)$. Tương tự $B' = (6\ ;\ 0)$; d_1 chính là đường thẳng $A'B'$ nên nó có phương trình

$$\frac{x-6}{-6} = \frac{y}{12} \text{ hay } 2x + y - 12 = 0.$$

b) Có thể giải tương tự như câu a). Sau đây ta sẽ giải bằng cách khác. Vì $d_2 // d$ nên phương trình của d_2 có dạng : $2x + y + C = 0$. Gọi $A' = (x'\ ;\ y')$ là ảnh của A qua phép vị tự đó thì ta có :

$$\overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \text{ hay } x' + 1 = -2,\ y' - 2 = -4.$$

Suy ra $x' = -3$, $y' = -2$.

Do A' thuộc d_2 nên $2.(-3) - 2 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 8$.

Phương trình của d_2 là $2x + y + 8 = 0$.

– Lấy C' là một giao điểm của đường tròn tâm A' bán kính $A'B'$ với đường thẳng OC.

– Đường thẳng qua C song song với $A'C'$ cắt Oy tại A.

Dễ thấy A là điểm phải dựng.

Bài toán có hai nghiệm hình.

1.24. Ta có $A(3\ ;\ -1)$ là tâm của (C) nên tâm A' của (C') là ảnh của A qua phép vị tự đã cho. Từ đó suy ra $A' = (-3\ ;\ 8)$. Vì bán kính của (C) bằng 3, nên bán kính của (C') bằng $|-2|.\ 3 = 6$.

Vậy (C') có phương trình : $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$.

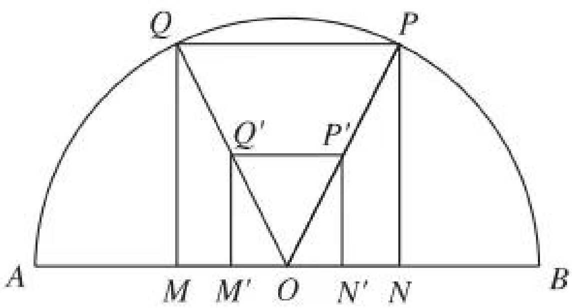
1.25. (h.1.39) Gọi O là trung điểm của AB. Giả sử dựng được hình vuông $MNPQ$ có M, N thuộc đường kính AB ; P, Q thuộc nửa đường tròn. Khi đó O phải là trung điểm của MN. Nếu lấy một hình vuông $M'N'P'Q'$ sao cho M', N' thuộc AB, O là trung điểm $M'N'$, thì dễ thấy

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

Từ đó suy ra hình vuông $MNPQ$ là ảnh của hình vuông $M'N'P'Q'$ qua phép vị tự tâm O, suy ra O, P, P' và O, Q, Q' thẳng hàng. Vậy ta có cách dựng :

– Dựng hình vuông $M'N'P'Q'$ nằm trong nửa hình tròn đã cho sao cho $M'N'$ thuộc AB và O là trung điểm của $M'N'$. Tia OP' cắt nửa đường tròn tại P ; tia OQ' cắt nửa đường tròn tại Q.

Khi đó dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông cần dựng.

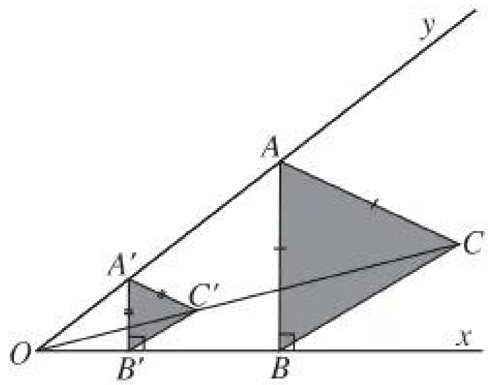


Hình 1.39

1.26. (h.1.40) Giả sử điểm A đã dựng được. Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên Ox, khi đó $AB = AC$. Lấy điểm A' bất kì trên Oy, gọi B' là hình chiếu vuông góc của A' trên Ox, đường thẳng qua A' song song với AC cắt đường thẳng OC tại C'. Khi đó có thể coi tam giác ABC là ảnh của tam giác $A'B'C'$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $\dfrac{AC}{A'C'}$ nên $A'C' = A'B'$.

Từ đó suy ra cách dựng :

– Lấy điểm A' bất kì trên Oy, dựng B' là hình chiếu vuông góc của A' lên Ox.



Hình 1.40