§7. PHÉP VỊ TỰ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ được gọi là *phép vị tự tâm I, tỉ số k*.

II. TÍNH CHẤT

1) Giả sử M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k. Khi đó

a) $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$;

b) $M'N' = |k|.MN$;

2) Phép vị tự tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy ;

b) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng ;

c) Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó ;

d) Biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

III. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

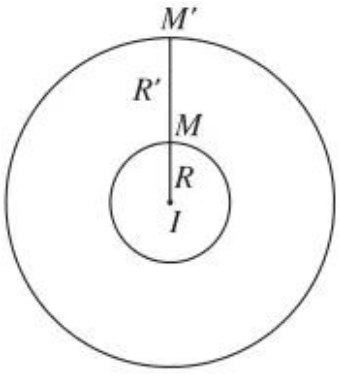
Định lí : *Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.*

Tâm của phép vị tự nói trên được gọi là *tâm vị tự* của hai đường tròn.

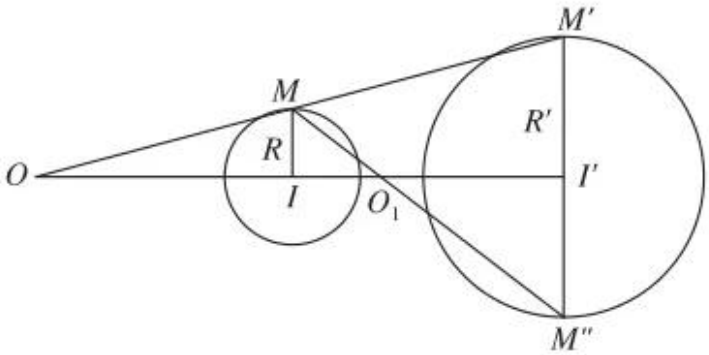
Cho hai đường tròn $(I ; R)$ và $(I' ; R')$. Có ba trường hợp xảy ra :

- *Nếu I trùng với I'* thì phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I ; R)$ thành đường tròn $(I ; R')$ (h.1.21).

- *Nếu I khác I' và* $R \neq R'$ thì phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn $(I ; R)$ thành đường tròn $(I' ; R')$. Ta gọi *O là tâm vị tự ngoài còn* O_1 *là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên* (h.1.22).

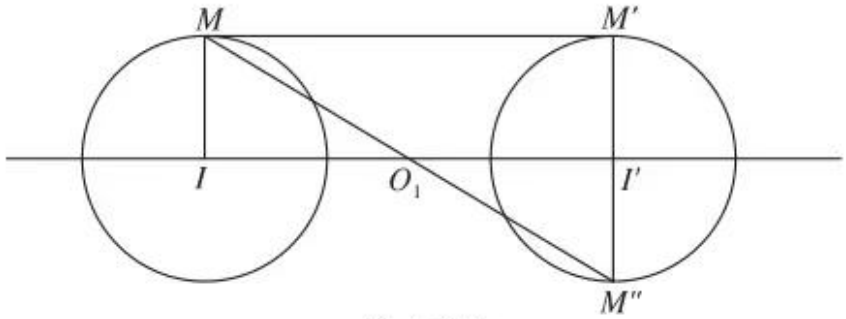


Hình 1.21



Hình 1.22

- *Nếu I khác I' và* $R = R'$ thì chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R}{R} = -1$ biến đường tròn $(I ; R)$ thành đường tròn $(I' ; R')$ (h.1.23). Đó chính là phép đối xứng tâm O_1.



Hình 1.23

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép vị tự

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

2. Ví dụ

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Giải

Do d' song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng : $3x + 2y + C = 0$. Lấy $M(0 ; 3)$ thuộc d. Gọi $M'(x' ; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$. Để ý rằng $\overrightarrow{OM} = (0;3)$, $\overrightarrow{OM'} = (x'; y') = -2\overrightarrow{OM}$, ta có $x' = 0, y' = -2.3 = -6$. Do M' thuộc d' nên $2.(-6) + C = 0$. Do đó $C = 12$.

Từ đó suy ra phương trình của d' là $3x + 2y + 12 = 0$.

Bài này cũng có thể giải bằng cách sau :

Lấy hai điểm M, N phân biệt thuộc d, tìm ảnh M', N' của chúng qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$. Khi đó d' chính là đường thẳng $M'N'$.

Gọi $M'(x' ; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự trên. Khi đó

$$x' = -2x, y' = -2y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}x', \ y = -\frac{1}{2}y'.$$

Ta có : $M \in d \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x' - \frac{2}{2}y' - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 12 = 0$

$\Leftrightarrow M'$ thuộc đường thẳng d' có phương trình $3x + 2y + 12 = 0$.

Vậy ảnh của d qua phép vị tự trên chính là d'.

VẤN ĐỀ 2

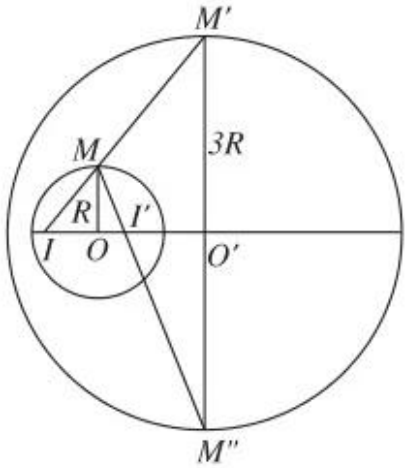
Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

1. Phương pháp giải

Sử dụng cách tìm tâm vị tự đã nêu ở mục III.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; 3R)$ như hình 1.24. Tìm các phép vị tự biến đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; 3R)$.



Hình 1.24

Giải

Sử dụng cách tìm tâm vị tự đã nêu ở mục III ta được hai phép vị tự $V_{(I,\,3)}$ và $V_{(I',\,-3)}$ biến đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; 3R)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2 ; 1)$ và $B(8 ; 4)$. Tìm toạ độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A ; 2)$ và $(B ; 4)$.

Giải

Đây là hai đường tròn không đồng tâm và khác bán kính, nên có hai phép vị tự tỉ số ± 2 biến đường tròn $(A ; 2)$ thành đường tròn $(B ; 4)$. Gọi $I(x ; y)$ là tâm vị tự. Khi đó ta có $\overrightarrow{IB} = \pm 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = \pm 2(2 - x) \\ 4 - y = \pm 2(1 - y). \end{cases}$

Giải các hệ phương trình trên sẽ tìm được tâm vị tự ngoài là $I(-4 ; -2)$ và tâm vị tự trong là $I'(4 ; 2)$.

VẤN ĐỀ 3

Sử dụng phép vị tự để giải toán dựng hình.

1. Phương pháp giải

Để xác định một điểm M ta xem nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép vị tự, hoặc xem M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép vị tự.

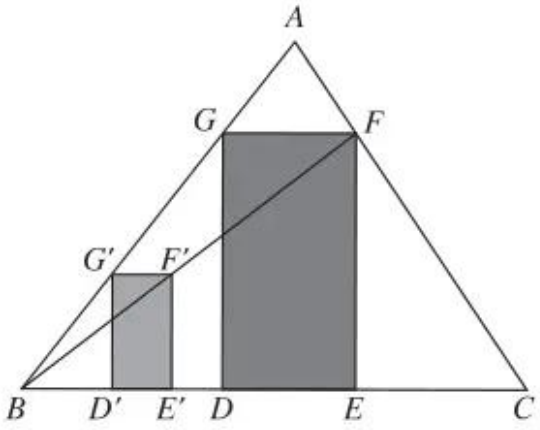
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho tam giác ABC có hai góc B, C đều nhọn. Dựng hình chữ nhật $DEFG$ có $EF = 2DE$ với hai đỉnh D, E nằm trên BC và hai đỉnh F, G lần lượt nằm trên AC, AB.

Giải

Giả sử đã dựng được hình chữ nhật $DEFG$ thoả mãn điều kiện đầu bài (h.1.25). Khi đó từ một điểm G' tuỳ ý trên đoạn thẳng AB ta dựng hình chữ nhật $D'E'F'G'$ có $E'F' = 2D'E'$, hai đỉnh D', E' nằm trên BC. Ta có

$$\frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'} = \frac{2GF}{2G'F'} = \frac{GF}{G'F'}.$$



Hình 1.25

Do đó B, F', F thẳng hàng.

Từ đó có thể xem hình chữ nhật $DEFG$ là ảnh của hình chữ nhật $D'E'F'G'$ theo phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{BG}{BG'}$. Từ đó ta có cách dựng :

– Lấy điểm G' tuỳ ý trên cạnh AB ;

– Dựng hình chữ nhật $D'E'F'G'$ có $E'F' = 2D'E'$, hai đỉnh D', E' nằm trên BC ;

– Đường thẳng BF' cắt AC tại F. Đường thẳng qua F song song với BC cắt AB tại G. Gọi E, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của F, G lên đường thẳng BC.

Ta sẽ chứng minh $DEFG$ là hình cần dựng.

Thật vậy, vì $GF \parallel G'F'$, $GD \parallel G'D'$ nên $\frac{GF}{G'F'} = \frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'}$. Từ đó suy ra $\frac{GD}{GF} = \frac{G'D'}{G'F'} = 2$. Do đó hình chữ nhật $DEFG$ là hình cần dựng.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 4 = 0$.

a) Hãy viết phương trình của đường thẳng d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

b) Hãy viết phương trình của đường thẳng d_2 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1 ; 2)$ tỉ số $k = -2$.

1.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Hãy viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1 ; 2)$ tỉ số $k = -2$.

1.25. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên nửa đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính AB của nửa đường tròn đó.

1.26. Cho góc nhọn xOy và điểm C nằm trong góc đó. Tìm trên Oy điểm A sao cho khoảng cách từ A đến Ox bằng AC.