ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.37. (h.2.59) a) $CC' \,//\, BB' \Rightarrow \Delta ICC' \backsim \Delta IBB'$

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{b}{c}.$$

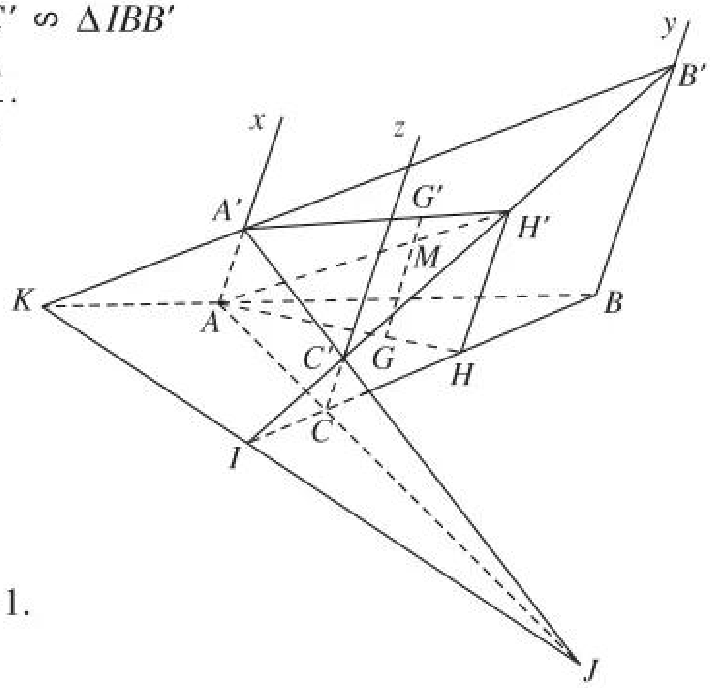
$CC' \,//\, AA' \Rightarrow \Delta JCC' \backsim \Delta JAA'$

$$\Rightarrow \frac{JC}{JA} = \frac{CC'}{AA'} = \frac{c}{a}.$$

$A'A \,//\, BB' \Rightarrow \Delta KAA' \backsim \Delta KBB'$

$$\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b}.$$

Do đó : $\dfrac{IB}{IC} \cdot \dfrac{JC}{JA} \cdot \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{a}{b} = 1.$



Hình 2.59

b) Gọi H và H' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và $B'C'$. Vì HH' là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$ nên $HH' \,//\, BB'$.

Mà $BB' \,//\, AA'$ suy ra $HH' \,//\, AA'$.

Ta có : $G \in AH$ và $G' \in A'H'$ và ta có : $\begin{cases} \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{A'G'}{A'H'} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow AA' \,//\, GG' \,//\, HH'.$

c) $AH' \cap GG' = M \Rightarrow GG' = G'M + MG.$

Ta có : $G'M \,//\, AA' \Rightarrow \Delta H'G'M \backsim \Delta H'A'A$

$$\Rightarrow \frac{G'M}{AA'} = \frac{H'G'}{H'A'} = \frac{1}{3} \Rightarrow G'M = \frac{1}{3}AA' = \frac{1}{3}a$$

$MG \,//\, HH' \Rightarrow \Delta AMG \backsim \Delta AH'H$

$$\Rightarrow \frac{MG}{HH'} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}HH'.$$

Mặt khác HH' là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$ nên

$$HH' = \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{b+c}{2} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}HH' = \frac{2}{3} \cdot \frac{b+c}{2} = \frac{1}{3}(b+c).$$

Do đó : $GG' = G'M + MG = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(b+c) = \frac{1}{3}(a+b+c).$

Vậy $GG' = \frac{1}{3}(a+b+c).$

2.38. (h.2.60) a) MB' qua M và song song với (ABC) và $(ABD) \Rightarrow MB'$ song song với giao tuyến AB của hai mặt phẳng này. Ta có : $MB' \parallel AB$ nên MB' và AB xác định một mặt phẳng. Giả sử MB cắt AB' tại I

Ta có : $I \in BM \Rightarrow I \in (BCD)$

$I \in AB' \Rightarrow I \in (ACD)$

nên $I \in (BCD) \cap (ACD) = CD$

$\Rightarrow I \in CD.$

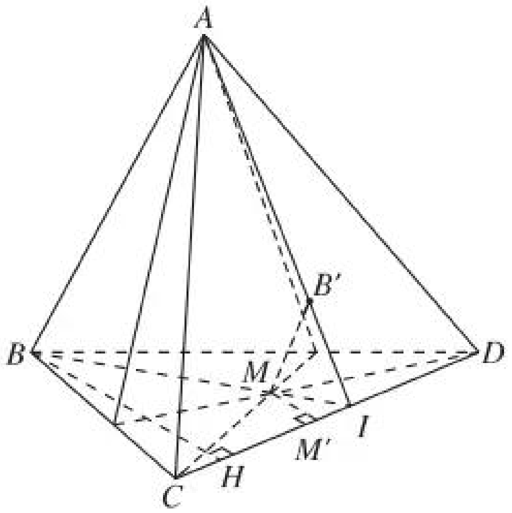
Vậy ba đường thẳng AB', BM và CD đồng quy tại I.

b) $MB' \parallel AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB} \cdot$

Kẻ $MM' \perp CD$ và $BH \perp CD$.

Ta có : $MM' \parallel BH \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH} \cdot$

Mặt khác : $\begin{cases} dt(\Delta MCD) = \frac{1}{2}CD.MM' \\ dt(\Delta BCD) = \frac{1}{2}CD.BH \end{cases}$



Hình 2.60

$$\Rightarrow \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)} = \frac{\frac{1}{2}CD.MM'}{\frac{1}{2}CD.BH} = \frac{MM'}{BH} \cdot$$

Do đó : $\frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH} = \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)} \cdot$ Vậy $\frac{MB'}{AB} = \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)}$.

c) Tương tự ta có : $\dfrac{MC'}{CA}=\dfrac{dt(\Delta MBD)}{dt(\Delta BCD)}$

$$\frac{MD'}{DA}=\frac{dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}.$$

Vậy : $\dfrac{MB'}{AB}+\dfrac{MC'}{CA}+\dfrac{MD'}{DA}=\dfrac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)}+\dfrac{dt(\Delta MBD)}{dt(\Delta BCD)}+\dfrac{dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}$

$$=\frac{dt(\Delta MCD)+dt(\Delta MBD)+dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}$$

$$=\frac{dt(\Delta BCD)}{dt(\Delta BCD)}=1.$$

2.39. (h.2.61) a) Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của AC và $A'C'$, ta có :

$I \in BM, G \in C'M, K \in B'M'$.

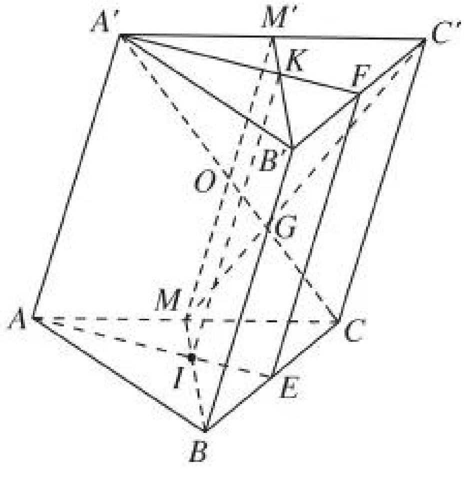
Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$\dfrac{MI}{MB}=\dfrac{MG}{MC'}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow IG \,//\, BC'$;

$\dfrac{MI}{MB}=\dfrac{M'K}{M'B'}=\dfrac{1}{3}$ và $MM' \,//\, BB' \Rightarrow IK \,//\, BB'$.

Ta có : $\begin{cases} IG \,//\, BC' \\ BC' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IG \,//\, (BB'C'C)$

$\begin{cases} IK \,//\, BB' \\ BB' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IK \,//\, (BB'C'C).$



Hình 2.61

Mặt khác IG và $IK \subset (IGK)$ nên $(IGK) \,//\, (BB'C'C)$.

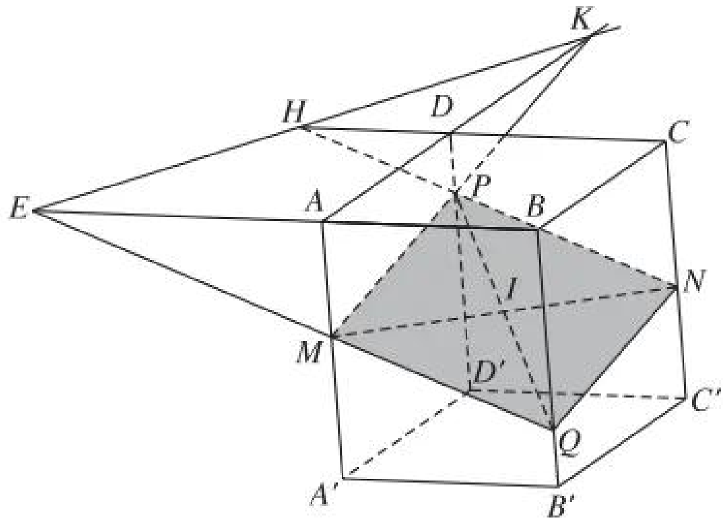
b) Gọi E và F tương ứng là trung điểm của BC và $B'C'$, O trung điểm của $A'C$.

A, I, E thẳng hàng nên (AIB') chính là (AEB'). A', G, C thẳng hàng nên $(A'GK)$ chính là $(A'CF)$.

Ta có $B'E \,//\, CF$ (do $B'FCE$ là hình bình hành) và $AE \,//\, A'F$ nên $(AIB') \,//\, (A'GK)$.

2.40. (h.2.62) a) Ta có mặt phẳng (AA', DD') song song với mặt phẳng (BB', CC'). Mặt phẳng (MNP) cắt hai mặt phẳng nói trên theo hai giao tuyến song song.

Nếu gọi Q là điểm trên cạnh BB' sao cho $NQ \mathbin{//} PM$ thì Q là giao điểm của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).



Hình 2.62

Nhận xét. Ta có thể tìm điểm Q bằng cách nối P với trung điểm I của đoạn MN và đường thẳng PI cắt BB' tại Q.

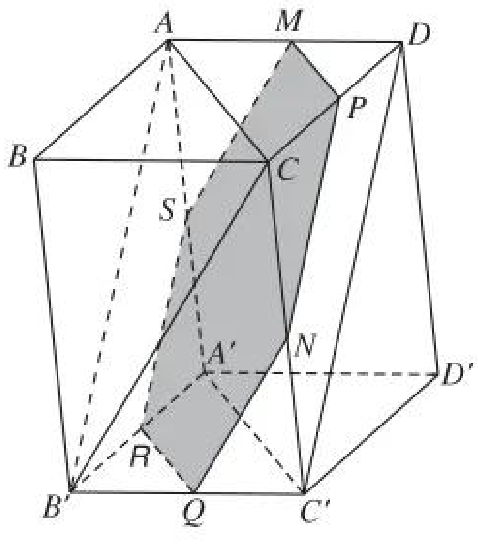
b) Vì mặt phẳng (AA', BB') song song với mặt phẳng (DD', CC') nên ta có $MQ \mathbin{//} PN$. Do đó mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện $MPNQ$ là một hình bình hành.

c) Giả sử P không phải là trung điểm của đoạn DD'. Gọi $H = PN \cap DC$, $K = MP \cap AD$. Ta có $d = HK$ là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(ABCD)$ của hình hộp. Chú ý rằng giao điểm $E = AB \cap MQ$ cũng nằm trên giao tuyến d nói trên. Khi P là trung điểm của DD' mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

2.41. (h.2.63) a) Vẽ MP song song với AC và cắt CD tại P.

Ta có $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{CN}{NC'}\cdot$

Do đó $PN \mathbin{//} DC' \mathbin{//} AB'$



Hình 2.63

Đường thẳng MN thuộc mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng này có $MP \mathbin{//} AC$ và $PN \mathbin{//} AB'$. Vậy mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ACB') và do đó $MN \mathbin{//} (ACB')$.

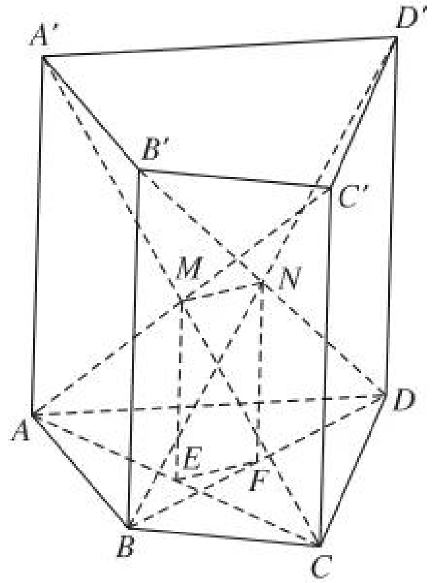
b) Vì mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ACB') nên hai mặt phẳng đó cắt các mặt bên của hình hộp theo các giao tuyến song song.

Ta vẽ NQ // CB', QR // $C'A'$ (// CA), RS // AB' (// PN) và tất nhiên SM // QN. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB') là hình lục giác $MPNQRS$ có các cạnh đối diện song song với nhau từng đôi một : MP // RQ, PN // SR, NQ // MS.

2.42. (h.2.64) a) Hình bình hành $ACC'A'$ có hai đường chéo là AC' và $A'C$ cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự, hai đường chéo BD' và $B'D$ cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

b) Trung điểm E của AC là hình chiếu của trung điểm M của AC' theo phương của cạnh lăng trụ. Tương tự, trung điểm F là hình chiếu trung điểm N của đường chéo BD' trên BD. Ta có EM // CC' và $EM = \frac{CC'}{2}$.

Mặt khác FN // DD' và $FN = \frac{DD'}{2}$. Từ đó ta suy ra tứ giác $MNFE$ là hình bình hành và ta có $MN = EF$.

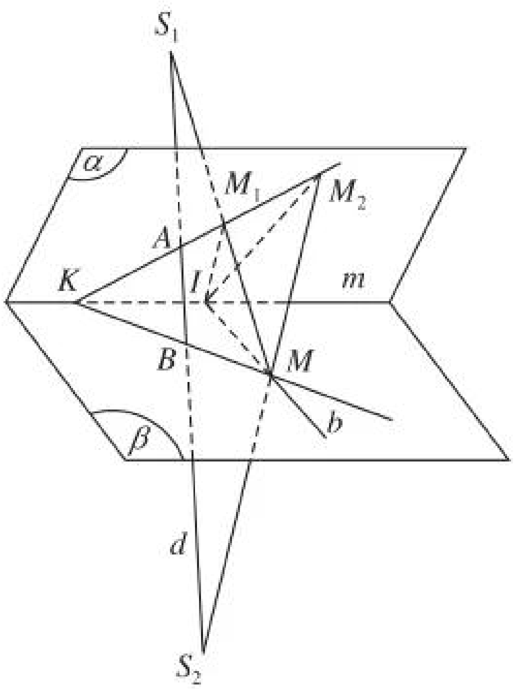


Hình 2.64

2.43. (h.2.65) a) Mặt phẳng (M, d) cắt (α) theo giao tuyến M_1M_2. Điểm A cũng thuộc giao tuyến đó. Vậy đường thẳng M_1M_2 luôn luôn đi qua điểm A cố định.

b) Mặt phẳng (M, d) cắt (β) theo giao tuyến BM. Điểm K thuộc giao tuyến đó nên ba điểm K, B, M thẳng hàng.

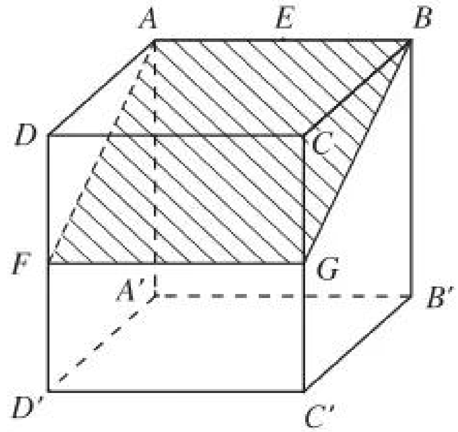
c) Giả sử b cắt m tại I thì mặt phẳng (S_1, b) luôn luôn cắt (α) theo giao tuyến IM_1. Do đó điểm M_1 di động trên giao tuyến IM_1 cố định. Còn khi M di động trên b thì mặt phẳng (S_2, b) cắt (α) theo giao tuyến IM_2. Do đó điểm M_2 chạy trên giao tuyến IM_2 cố định.



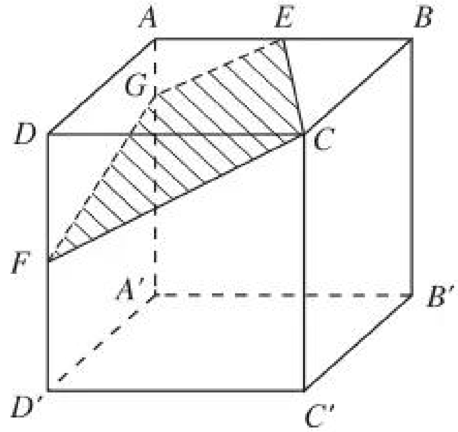
Hình 2.65

2.44. (h.2.66) Ta xác định thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng sau :

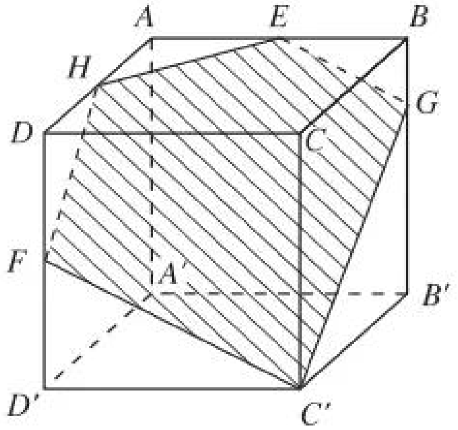
– Mặt phẳng (EFB) : ta vẽ FG // AB và được thiết diện là hình chữ nhật $ABGF$, G là trung điểm của CC'.



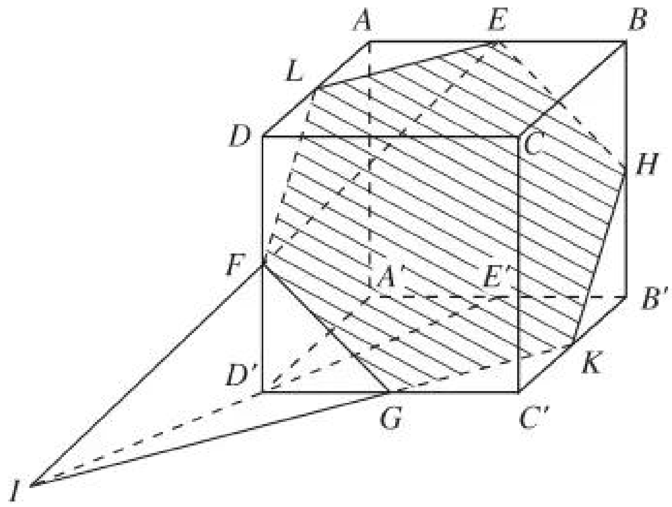
Hình 2.66



Hình 2.67



Hình 2.68



Hình 2.69

– (h.2.67) Mặt phẳng (EFC) : Nối FC và vẽ EG // FC, ta được thiết diện là hình thang $ECFG$ ($AG = \frac{1}{4}AA'$).

– (h.2.68) Mặt phẳng (EFC') : Nối FC' và vẽ EG // FC'. Nối GC' và vẽ FH // GC'. Ta được thiết diện là hình ngũ giác $EGC'FH$

$$(BG = \frac{1}{4}BB', AH = \frac{1}{3}AD).$$

– (h.2.69) Mặt phẳng (EFK) với K là trung điểm của đoạn $B'C'$. Lấy trung điểm E' của đoạn $A'B'$. Ta có $I = EF \cap E'D'$. Ta có IK là giao tuyến của hai mặt phẳng (EFK) và $(A'B'C'D')$. Gọi $G = IK \cap C'D'$. Nối F với G, vẽ $EH \parallel FG$. Nối K với H, vẽ $FL \parallel KH$ và nối L với E. Ta được thiết diện là hình lục giác đều $EHKGFL$. (G, H, L theo thứ tự là trung điểm của $D'C'$, $B'B$, AD).