ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.41. a) Đúng b) Đúng c) Sai

d) Sai e) Sai f) Đúng.

3.42. a) Sai b) Sai

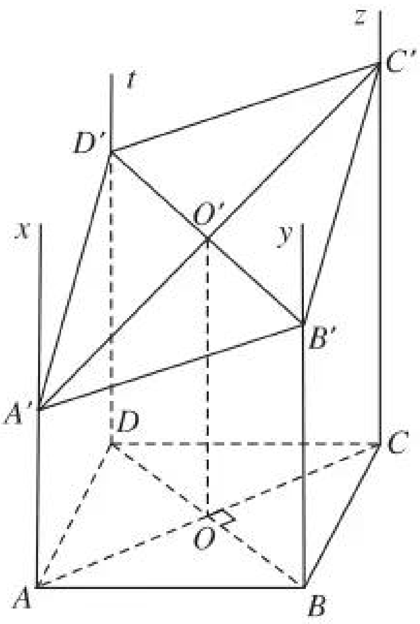
c) Đúng d) Sai.

3.43. (h.3.83) a) Ta có hai mặt phẳng song song là :

$(Ax, AD) \mathbin{/\!/} (By, BC)$.

Hai mặt phẳng này bị cắt bởi mặt phẳng (β) nên ta suy ra các giao tuyến của chúng phải song song nghĩa là $A'D' \mathbin{/\!/} B'C'$.

Tương tự ta chứng minh được $A'B' \mathbin{/\!/} D'C'$. Vậy $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Các hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ đều có OO' là đường trung bình trong đó O là tâm của hình vuông $ABCD$ và O' là tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$. Do đó :



Hình 3.83

$AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'$.

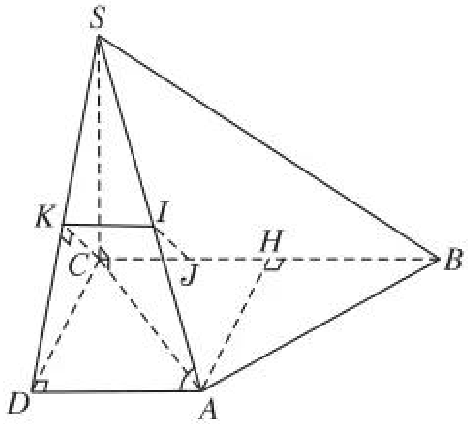
b) Muốn hình bình hành $A'B'C'D'$ là hình thoi ta cần phải có $A'C' \perp B'D'$. Ta đã có $AC \perp BD$. Người ta chứng minh được rằng hình chiếu vuông góc của một góc vuông là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song với mặt phẳng chiếu hay nằm trong mặt chiếu. Vậy $A'B'C'D'$ là hình thoi khi và chỉ khi $A'C'$ hoặc $B'D'$ song song với mặt phẳng (α) cho trước. Khi đó ta có $AA' = CC'$ hoặc $BB' = DD'$.

c) Muốn hình bình hành $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật ta cần có $A'B' \perp B'C'$, nghĩa là $A'B'$ hoặc $B'C'$ phải song song với mặt phẳng (α). Khi đó ta có $AA' = BB'$ hoặc $BB' = CC'$, nghĩa là hình bình hành $A'B'C'D'$ có hai đỉnh kề nhau cách đều mặt phẳng (α) cho trước.

3.44. (h.3.84) a) Gọi H là trung điểm của đoạn BC. Qua A vẽ AD song song với BC và bằng đoạn HC thì góc giữa BC và SA là góc $\widehat{SAD}$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $SD \perp DA$ và khi đó :

$$\cos\widehat{SAD} = \frac{AD}{SA} = \frac{HC}{SA} = \frac{\frac{7a}{2}}{7a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy góc giữa BC và SA được xác định sao cho $\cos\widehat{SAD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Hình 3.84

b) Vì $BC \,//\, AD$ nên BC song song với mặt phẳng (SAD). Do đó khoảng cách giữa SA và BC chính là khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng (SAD).

Ta kẻ $CK \perp SD$, suy ra $CK \perp (SAD)$, do đó CK chính là khoảng cách nói trên. Xét tam giác vuông SCD với đường cao CK xuất phát từ đỉnh góc vuông C ta có hệ thức :

$$\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CD^2} \Rightarrow \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{(7a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{7a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

(vì $CD = AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$).

Do đó $\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{49a^2} + \frac{4}{3.49a^2} = \frac{3+4}{3.49a^2} = \frac{1}{21a^2}$. Vậy $CK = a\sqrt{21}$.

+ ***Chú ý.*** Nếu kẻ $KI \parallel AD$ và kẻ $IJ \parallel CK$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

3.45. (h.3.85) Giả sử $AB \perp CD$ ta phải chứng minh $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

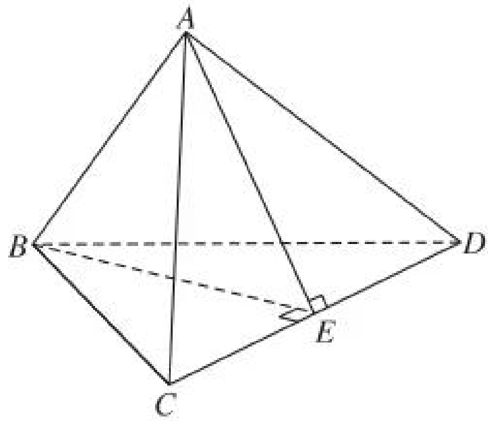
Thật vậy, kẻ $BE \perp CD$ tại E, do $AB \perp CD$ ta suy ra $CD \perp (ABE)$ nên $CD \perp AE$. Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông AEC, BEC, AED và BED ta có :

$$AC^2 = AE^2 + CE^2$$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2$$

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2.$$



Hình 3.85

Từ đó ta suy ra $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Ngược lại nếu tứ diện $ABCD$ có $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ thì :

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$

Nếu $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = k^2$ thì trong mặt phẳng (ACD) điểm A thuộc đường thẳng vuông góc với CD tại điểm H trên tia ID với I là trung điểm của CD sao cho $IH^2 = \dfrac{k^2}{2CD}$.

Tương tự điểm B thuộc đường thẳng vuông góc với CD cũng tại điểm H nói trên. Từ đó suy ra CD vuông góc với mặt phẳng (ABH) hay $CD \perp AB$.

Nếu $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = -k^2$ thì ta có

$AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2 = k^2$ và đưa về trường hợp xét như trên.

+ ***Chú ý.*** Từ kết quả của bài toán trên ta suy ra :

Tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

3.46. (h.3.86) a) Ta có $AB' \parallel DC'$. Gọi α là góc giữa AB' và BC', khi đó $\alpha = \widehat{DC'B}$.

Vì tam giác $BC'D$ đều nên $\alpha = 60^{\circ}$.

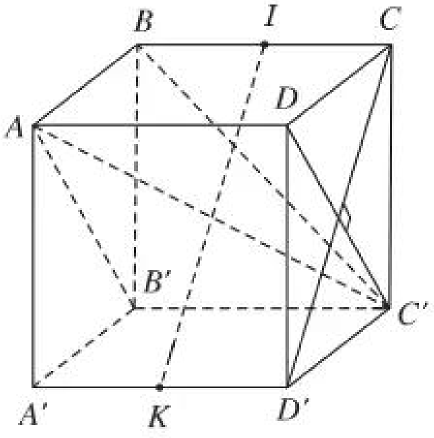
b) Gọi β là góc giữa AC' và CD'.

Vì $CD' \perp C'D$ và $CD' \perp AD$

(do $AD \perp (CDD'C')$),

ta suy ra $CD' \perp (ADC'B')$.

Vậy $CD' \perp AC'$ hay $\beta = 90^{\circ}$.



Hình 3.86

\+ ***Chú ý.*** Ta có thể chứng minh $\beta = 90^{\circ}$ bằng cách khác như sau :

Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $A'D'$. Ta có $IK \parallel CD'$. Dễ dàng chứng minh được $AIC'K$ là một hình bình hành có bốn cạnh bằng nhau và đó là một hình thoi. Vậy $AC' \perp IK$ hay $AC' \perp CD'$ và $\beta = 90^{\circ}$.

3.47. (h.3.87) Theo giả thiết ta có M và N là hai điểm di động lần lượt trên hai tia Ax và By sao cho $AM + BN = MN$.

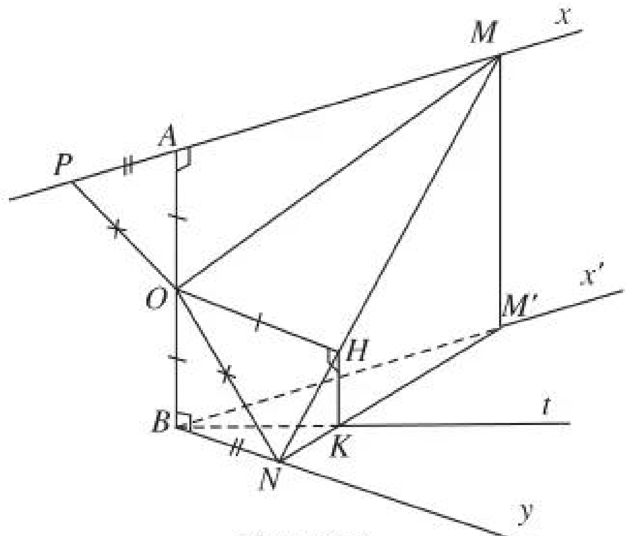
a) Kéo dài MA một đoạn $AP = BN$, ta có $MP = MN$ và $OP = ON$.

Do đó $\Delta OMP = \Delta OMN$ (c. c. c)

$\Rightarrow OA = OH$ nên $OH = a$.

Ta suy ra $HM = AM$ và $HN = BN$.

b) Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Bx', By) ta có :



Hình 3.87

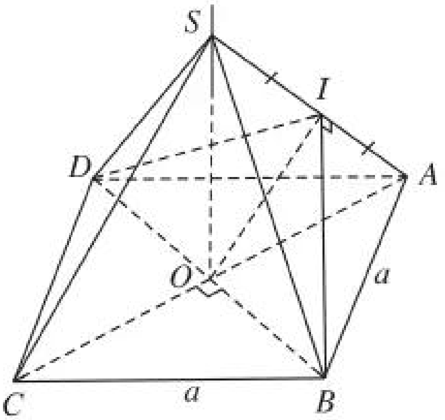
$HK \parallel MM'$ với $K \in NM'$.

Khi đó $\dfrac{KM'}{KN} = \dfrac{HM}{HN} = \dfrac{AM}{BN} = \dfrac{BM'}{BN}$.

Do đó đối với tam giác BNM' đường thẳng BK là phân giác của góc $\widehat{x'By}$.

c) Gọi (β) là mặt phẳng (AB, BK). Vì $HK \parallel AB$ nên HK nằm trong mặt phẳng (β) và do đó H thuộc mặt phẳng (β). Trong mặt phẳng (β) ta có $OH = a$. Vậy điểm H luôn luôn nằm trên đường tròn cố định, đường kính AB và nằm trong mặt phẳng cố định $(\beta) = (AB, BK)$.

3.48. (h.3.88) a) Hai tam giác vuông SOB và AOB có cạnh OB chung và $SB = AB = a$ nên chúng bằng nhau. Do đó $SO = OA = OC$ suy ra tam giác SAC vuông tại S.



Hình 3.88

Mặt khác vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn SA.

Vì $BS = BA = a$ nên $BI \perp SA$.

Vì $DS = DA = a$ nên $DI \perp SA$. Ta suy ra $\widehat{BID}$ là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). Trong tam giác vuông AOB ta có :

$$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ (vì theo giả thiết } OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}\text{).}$$

Vì $SO = OA$ nên $OI = \dfrac{OA\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Như vậy ta suy ra : $OI = OB = OD$ do đó tam giác BID vuông tại I, nghĩa là $(SAB) \perp (SAD)$. Chứng minh tương tự ta có $(SCB) \perp (SCD)$.

c) Khoảng cách giữa SA và BD chính là độ dài đoạn vuông góc chung OI.

Ta có : $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.