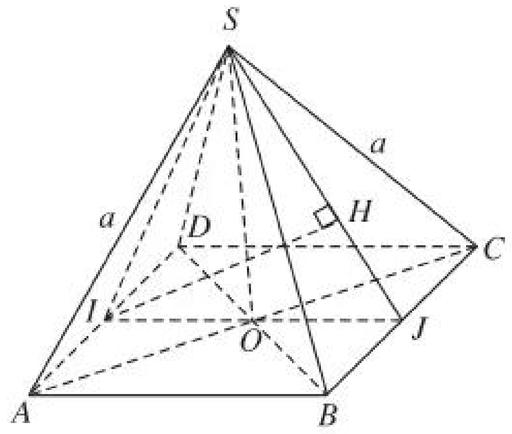
II. ĐỀ KIỂM TRA

Đề 1



Hình 4.10

(h.4.10)

Câu 1. $SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Câu 2. Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có :

$$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp IJ \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$$

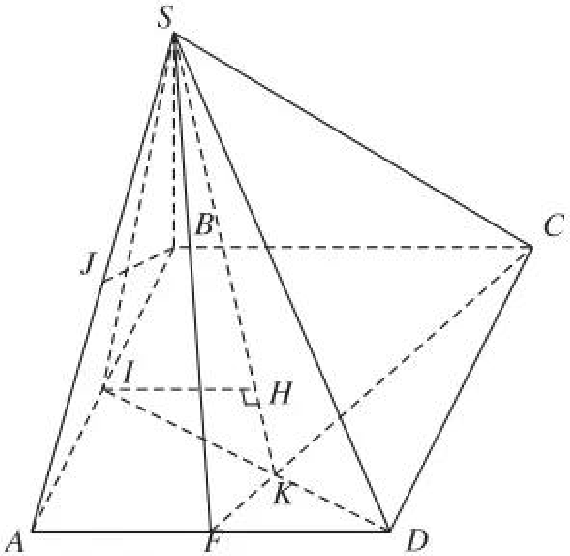
$$\Rightarrow (SIJ) \perp (SBC).$$

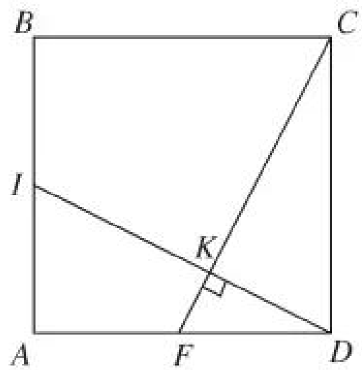
Câu 3. $AD \,//\, (SBC) \Rightarrow d\left[AD, (SBC)\right] = d\left[I, (SBC)\right]$.

Hạ $IH \perp SJ$, ta có $IH \perp (SBC)$ nên $IH = d\left[I, (SBC)\right]$. Tam giác SIJ cân tại S có $SI = SJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{SIJ} = \dfrac{1}{2} IH.SJ = \dfrac{1}{2} SO.IJ$. Vậy

$$IH = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right).a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Đề 2





Hình 4.11

(h 4.11)

Câu 1. Hạ $SI \perp AB$. Ta có $SI \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} SI \perp AD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp SA.$$

Câu 2. $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ S \in (SAB) \\ DA \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow d\left(SD, BC\right) = d\left(B, SA\right)$

Hạ $BJ \perp SA$, ta có : $BJ = d\left(BC, SD\right)$.

Tam giác SAB đều có cạnh bằng a nên $BJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3. Dễ thấy rằng $CF \perp ID$. Ta có :

$$\begin{cases} CF \perp SI \\ CF \perp ID \end{cases} \Rightarrow CF \perp (SID)$$

$\Rightarrow (SFC) \perp (SID)$ (theo giao tuyến SK, $K = ID \cap FC$).

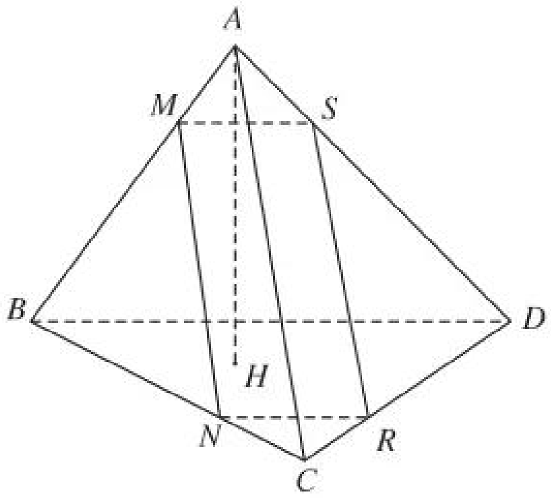
Hạ $IH \perp SK$, ta có : $IH \perp (SCF)$.

Ta có : $CF = ID = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác, ta có : $DK = \dfrac{DF.DC}{FC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Như vậy $IK = ID - KD = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Xét tam giác vuông SIK, ta được : $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IK^2} \Rightarrow IH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Đề 3



Hình 4.12

(h 4.12)

Câu 1. Dễ thấy tứ giác $MNRS$ là hình bình hành.

Kẻ AH vuông góc với (BCD), ta có : $AH \perp BD$ (1)

Xét các tam giác vuông AHB, AHC, AHD :

Chúng có AH chung và $AB = AC = AD = a$ nên chúng bằng nhau.

Suy ra $HB = HC = HD$ hay H cách đều các đỉnh B, C, D.

Như vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Do tam giác BCD đều nên H cũng là trực tâm, trọng tâm tam giác BCD.

Khi đó : $CH \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2), ta có : $BD \perp (CAH) \Rightarrow BD \perp AC$.

Mà $MS \,//\, BD$, $MN \,//\, AC$ nên $MN \perp MS$, như vậy tứ giác $MNRS$ là hình chữ nhật.

SAM là tam giác đều cạnh x nên $MS = x$.

BMN là tam giác đều, cạnh $a - x$ nên $MN = a - x$.

Suy ra $S = S_{MNRS} = MN.MS = x(a-x)$.

Câu 2. $S = x(a-x) \le \left(\dfrac{x+(a-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

$$S = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Như vậy $\max S = \dfrac{a^2}{4}$.

Câu 3. Dễ thấy

$\Delta MCA = \Delta MDA$ (c-g-c)

$\Rightarrow MC = MD$

$\Rightarrow \Delta MCD$ cân đỉnh *M*.

Kẻ $MI \perp CD$, ta có : *I* là trung điểm của *CD* $\Rightarrow S_{\Delta MCD} = \dfrac{1}{2}CD.MI$.

Mà *CD* không đổi nên $S_{\Delta MCD}$ nhỏ nhất nếu *MI* nhỏ nhất.

Ta nhận thấy :

MI nhỏ nhất khi $MI \perp AB \Leftrightarrow M$ là trung điểm *AB*.

Ta tìm *MI* :

Trong tam giác vuông *BIM*, ta có :

$$MI^2 = BI^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow MI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $S_{\Delta MCD} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.