II. ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

1.43. Dùng công thức toạ độ của phép đối xứng tâm $I(-2\,;1)$, ta có :
$$M' = D_I(M) \Rightarrow M'\begin{cases} x' = 2.(-2) - x \\ y' = 2.1 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}.$$
Thế $(x\ ;\ y)$ vào phương trình d, ta có phương trình $d': 2(-4 - x') - (2 - y') + 6 = 0 \ \Rightarrow d': 2x' - y' + 4 = 0$. Đổi kí hiệu, ta có phương trình $d': 2x - y + 4 = 0$.

1.44. (C) có tâm $I(-1\,;2)$, bán kính $R = 4$. (C') có tâm $I'(10\,;-5)$, bán kính $R' = 4$. Vậy $(C') = T_{\vec{v}}(C)$, $\vec{v} = \overrightarrow{II'} = (11\,;-7)$.

1.45. Nhận xét d và d' không song song nên phép đối xứng trục biến d thành d' có trục là phân giác của góc tạo bởi d và d'. Phương trình các đường phân giác là :
$$\frac{|x - 5y + 7|}{\sqrt{26}} = \frac{|5x - y - 13|}{\sqrt{26}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

1.46. Giả sử $M_1 = Đ_I(M)$ và $M' = Q_{(O,-90^o)}(M_1)$. Ta có :
$$\begin{cases} x_1 = -2 - x \\ y_1 = 4 - y \end{cases}, \begin{cases} x' = y_1 \\ y' = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 - y \\ y' = 2 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x' \\ x = -2 + y' \end{cases}.$$ Thế $(x\ ;\ y)$ theo $(x'\ ;\ y')$ vào phương trình d, ta có : $3(y' - 2) - (4 - x') - 3 = 0 \ \Leftrightarrow x' + 3y' - 13 = 0$. Vậy phương trình d' là $x + 3y - 13 = 0$.

1.47. Chỉ cần tìm ảnh của tâm đường tròn qua trục d.

1.48. (C) có tâm $I(1\ ;\ 2)$, bán kính $R = 3$. Gọi I', R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ảnh, ta có :

$$I' = Q_{(O,-90^o)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y = 2 \\ y' = -x = -1 \end{cases} \text{ và } R' = 3.$$

Vậy phương trình (C') là $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

1.49. (h.1.47) ***Nhận xét***

Nếu ta "kéo" tam giác ABC xuống theo phương AH sao cho B trùng E, C trùng D thì A trùng với A'. Khi đó MD, EN, AH là ba đường cao của tam giác $A'ED$ nên chúng đồng quy.

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BE}$, ta có

$$T_{\overrightarrow{BE}} : A \mapsto A'$$
$$B \mapsto E$$
$$C \mapsto D$$

Khi đó, ta có : $A'E \,//\, AB$, $A'D \,//\, AC$.

Gọi $I = DM \cap EN$.

Ta có : $\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \,//\, A'E \end{cases} \Rightarrow DM \perp A'E$.

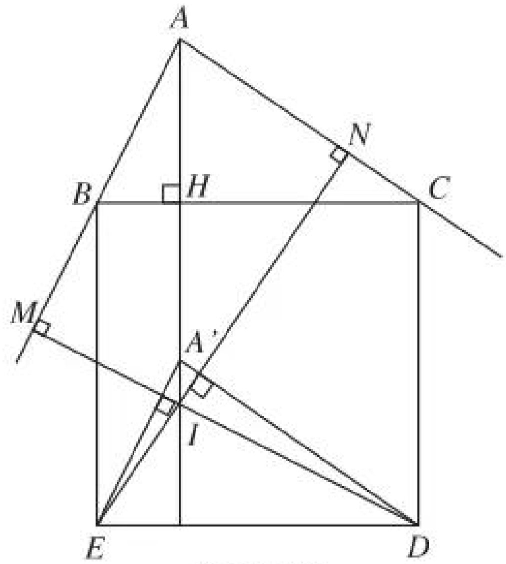
Tương tự, ta có : $EN \perp A'D$.

Xét $\Delta A'ED$, vì I là giao điểm của hai đường cao nên I là trực tâm của tam giác trên.

Suy ra $A'I \perp ED$

$\Rightarrow AI \perp BC$ hay $I \in AH$.

Vậy AH, DM, EN đồng quy tại I.



Hình 1.47

1.50. (h.1.48) $T_{\overrightarrow{O_2O_1}} : B \mapsto A$

$$M \mapsto E$$

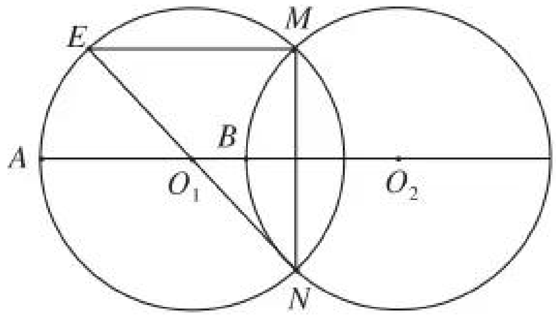
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{O_2O_1}$$

ΔNME vuông tại M (vì $ME // AB$ và $AB \perp MN$), do đó NE là đường kính. Từ đó ta có :

$$NE^2 = NM^2 + ME^2$$

$$\Leftrightarrow (2R)^2 = MN^2 + AB^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 + AB^2 = 4R^2.$$



Hình 1.48

1.51. (h.1.49) Vẽ đường kính BB_1. Vì $AB_1 // HC$ và $AH // B_1C$ nên $AHCB_1$ là hình bình hành, suy ra : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B_1C}$. B, C cố định nên $\overrightarrow{B_1C}$ không đổi.

Như vậy $H = T_{\overrightarrow{B_1C}}(A)$. Suy ra tập hợp các điểm H là đường tròn $C'(O'$; $R)$, chính là ảnh của đường tròn $C(O$; $R)$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{B_1C}}$.

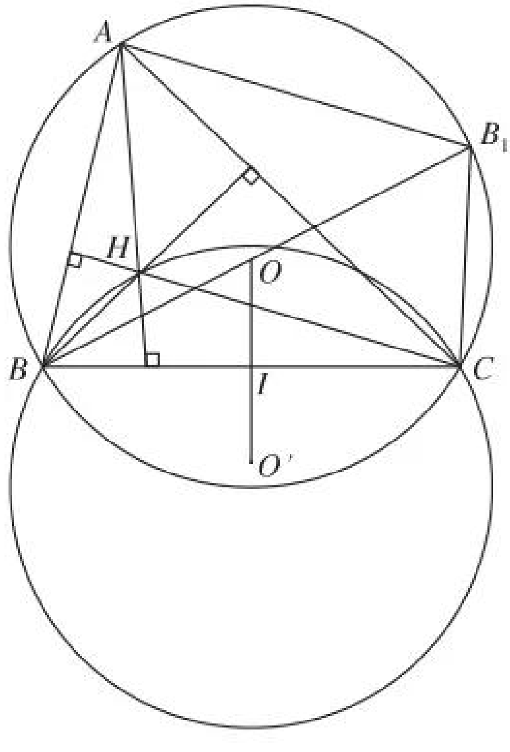
+ Xác định tâm của (C') :

Ta có :

$O' = T_{\overrightarrow{B_1C}}(O)$, $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{B_1C} = 2\overrightarrow{OI}$

(I là trung điểm BC).

Vậy O' đối xứng với O qua BC.



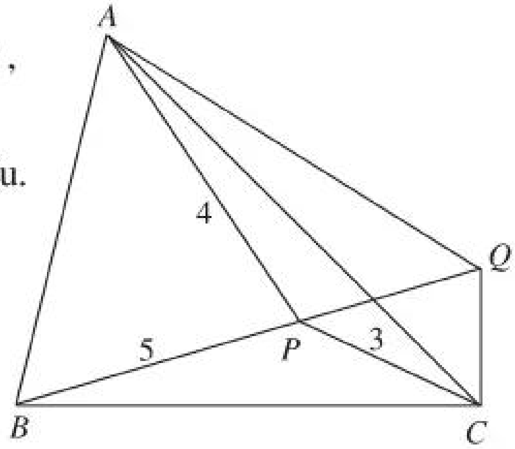
Hình 1.49

1.52. (h 1.50)

Xét phép quay $Q_{(C,\, 60^o)}$: $\Delta CBP \mapsto \Delta CAQ$,

ta có : $\begin{cases} CP = CQ \\ \widehat{PCQ} = 60^o \end{cases} \Rightarrow \Delta PCQ$ là tam giác đều.

$$\begin{cases} AQ = BP = 5 \\ AP = 4 \\ PQ = PC = 3 \end{cases} \Rightarrow AQ^2 = AP^2 + PQ^2$$



Hình 1.50

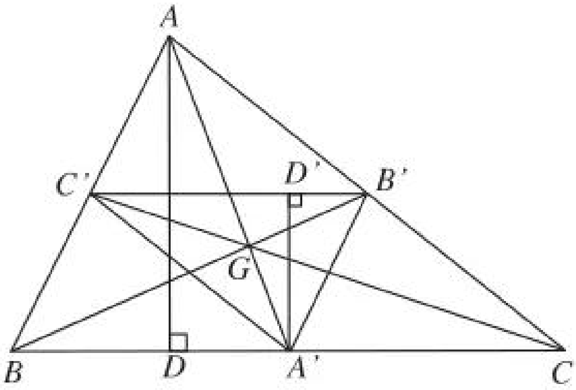
$\Rightarrow \widehat{APQ} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{APQ} + \widehat{QPC} = 90^o + 60^o = 150^o$.

Áp dụng định lí hàm số côsin trong tam giác APC ta tính được chu vi tam giác ABC là : $p = 3AC = 3\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

1.53. (h.1.51) a) Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC} \end{cases}$$



Hình 1.51

$\Rightarrow \Delta A'B'C'$ là ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm G, tỉ số vị tự $k = -\frac{1}{2}$.

b) Trong phép vị tự $V_{(G,\, k=-\frac{1}{2})}$, đường cao AD của ΔABC biến thành đường cao $A'D'$ của $\Delta A'B'C'$, nên $A'D' \perp C'B'$.

Mà $C'B' // CB$ nên $A'D' \perp BC$.

Mặt khác A' là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Suy ra $A'D'$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Phép vị tự $V_{(G,\, k=-\frac{1}{2})}$ biến các đường cao của tam giác ABC thành các đường trung trực của tam giác ABC nên trực tâm H biến thành tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó: $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Suy ra ba điểm H, G, O thẳng hàng.