II. ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

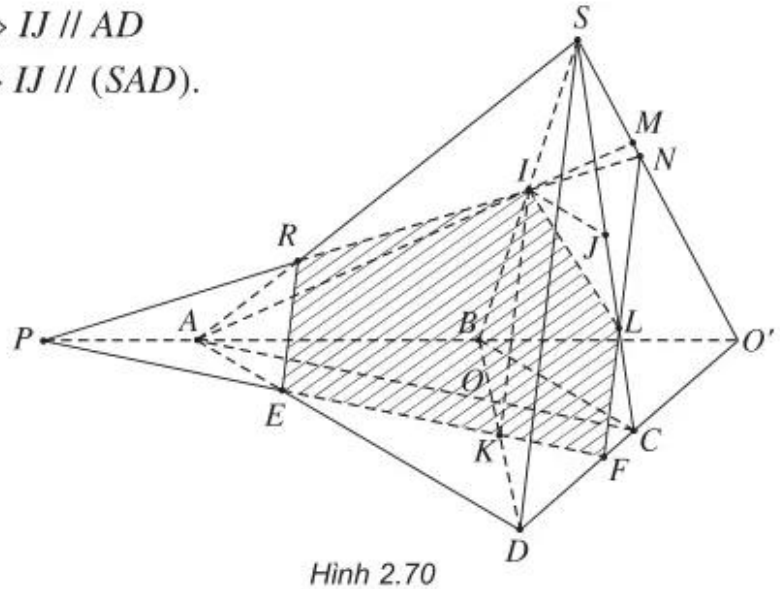
2.45. (h 2.70)

a) Gọi $O' = AB \cap CD$, $M = AI \cap SO'$.

Ta có : $M = AI \cap (SCD)$.

b) $IJ \,//\, BC \Rightarrow IJ \,//\, AD$

$\Rightarrow IJ \,//\, (SAD)$.



Hình 2.70

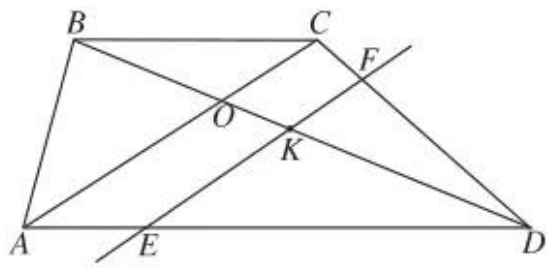
c) (h 2.71) Đường thẳng qua I song song với SD cắt BD tại K. Do $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BC}{AD} < 1$ nên $OB < OD$. Do đó điểm K thuộc đoạn OD.

Qua K, kẻ đường thẳng song song với AC cắt DA, DC, BA lần lượt tại E, F, P.

Gọi $R = IP \cap SA$. Kéo dài PI cắt SO' tại N.

Gọi $L = NF \cap SC$.

Ta có thiết diện là ngũ giác $IREFL$.



Hình 2.71

2.46. (h.2.72) a) (P) // BC nên (P) sẽ cắt (SBC) theo giao tuyến $B'C'$ song song với BC.

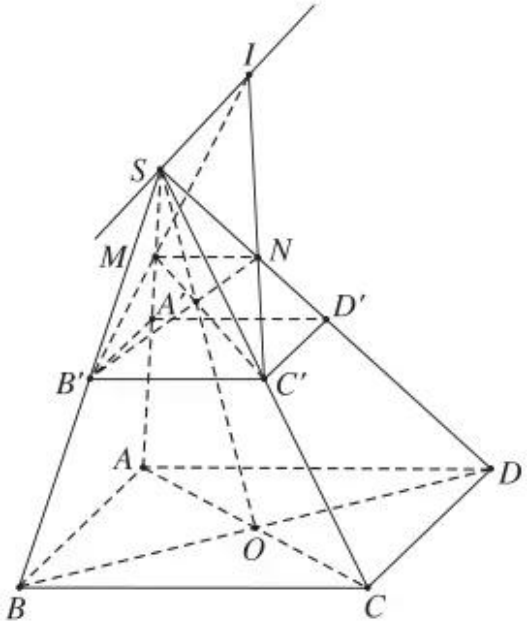
Tương tự, (P) cắt (SAD) theo giao tuyến MN song song với AD.

Ta có thiết diện là hình thang $MB'C'N$.

Khi M trùng với trung điểm A' của cạnh SA thì thiết diện $MB'C'N$ là hình bình hành.

b) Với M không trùng với A':

Gọi $I = B'M \cap C'N$. Ta có :
$I \in B'M \subset (SAB)$, tương tự
$I \in C'N \subset (SCD)$. Như vậy
$I \in \Delta = (SAB) \cap (SCD)$.



Hình 2.72

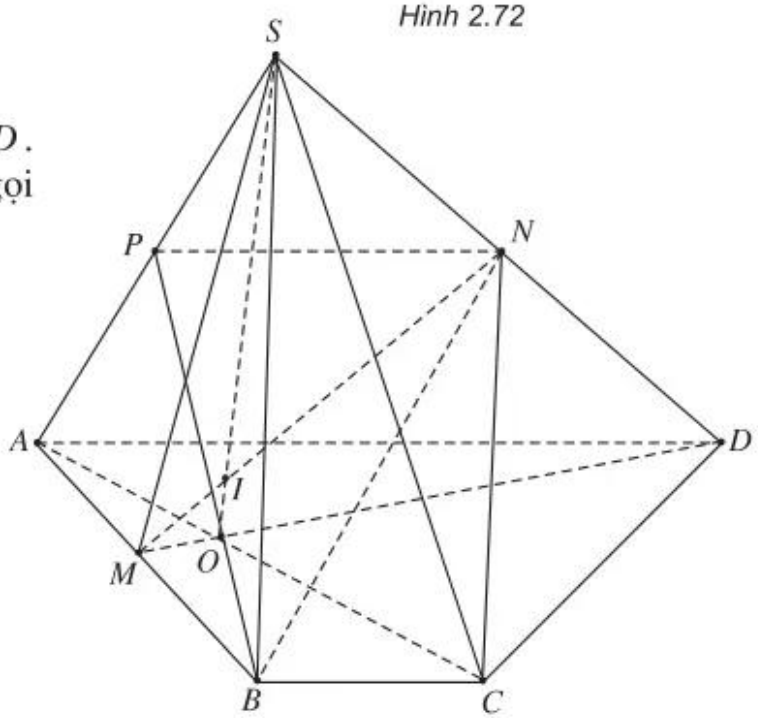
2.47. (h.2.73) a) Gọi $O = AC \cap MD$. Trong mặt phẳng (SMB) gọi $I = SO \cap MN$.

Ta có :

$I = (SAC) \cap MN$.

b) $AD // BC\left(BC \subset (SBC)\right)$

$\Rightarrow AD // (SBC)$. Mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (NBC) theo giao tuyến $NP//AD$ ($P \in SA$). Ta có thiết diện cần tìm là hình thang $BCNP$.



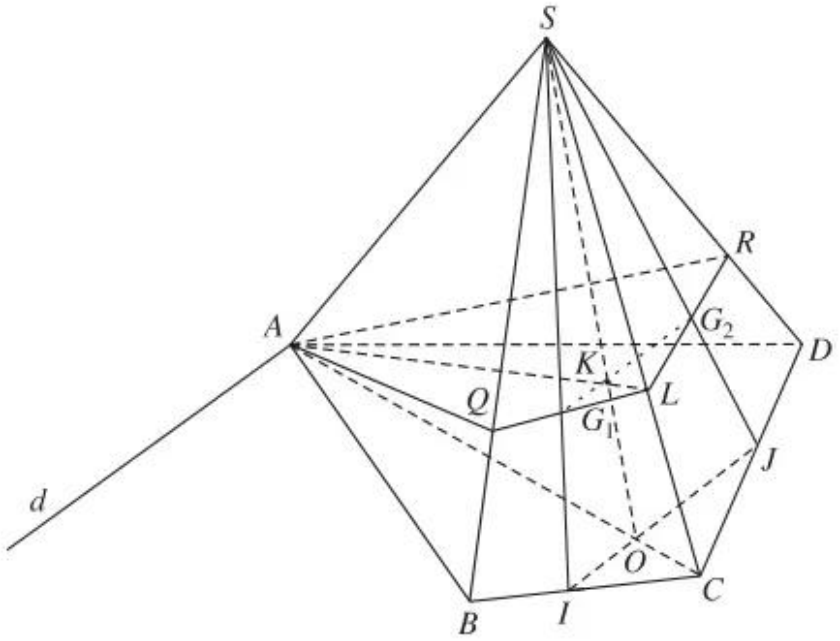
Hình 2.73

2.48. (h.2.74) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, CD. Ta có $IJ // G_1G_2$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (AG_1G_2) và $(ABCD)$ là đường thẳng d qua A và song song với IJ.

Gọi $O = IJ \cap AC$, $K = G_1G_2 \cap SO$, $L = AK \cap SC$.

LG_2 cắt SD tại R.

LG_1 cắt SB tại Q.

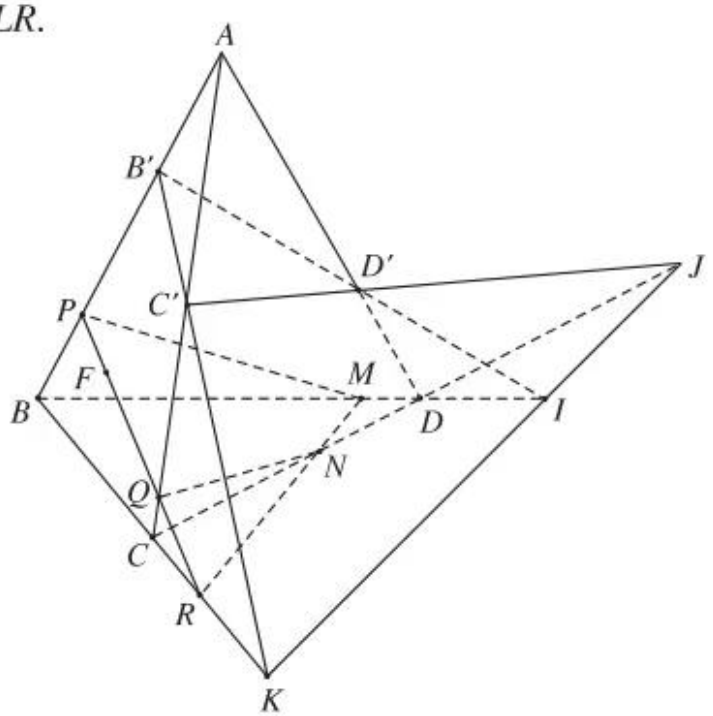


Hình 2.74

Ta có thiết diện là tứ giác $AQLR$.

2.49. (h.2.75) a) Chú ý rằng I, J, K thẳng hàng vì chúng cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (CBD) và $(C'B'D')$.

b) Thiết diện tạo thành là tứ giác $NMPQ$ như hình vẽ.



Hình 2.75

2.50. (h.2.76) Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Ta có :

$$MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{1}{2}AB^2 \qquad (1)$$

$$MC^2 + MD^2 = 2MF^2 + \frac{1}{2}CD^2 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2), ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$
$$= 2\left(ME^2 + MF^2\right) + \frac{1}{2}\left(AB^2 + CD^2\right).$$

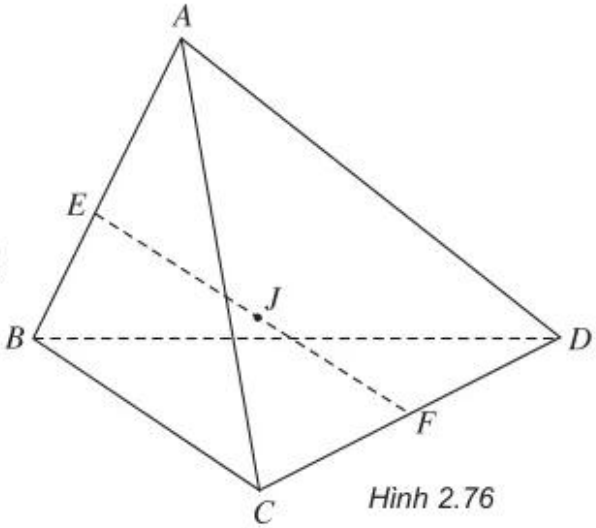
Gọi J là trung điểm EF, ta có : (h 2.76)

$$ME^2 + MF^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2}EF^2.$$

Khi đó :

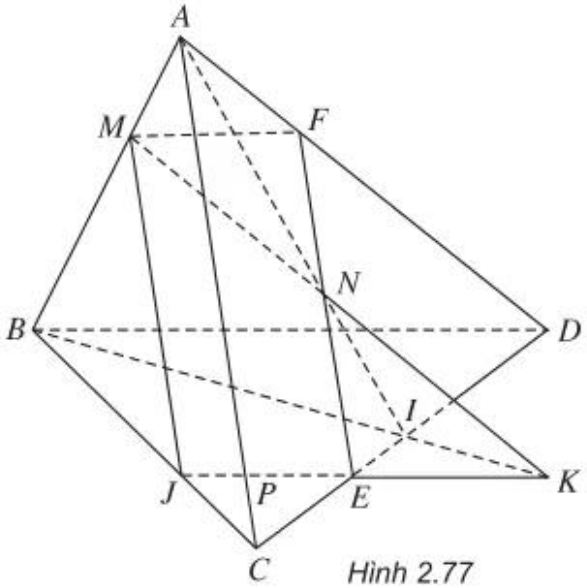
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$
$$= 2\left(2MJ^2 + \frac{1}{2}EF^2\right) + \frac{1}{2}\left(AB^2 + CD^2\right)$$
$$\geq EF^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2).$$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv J$.



Hình 2.76

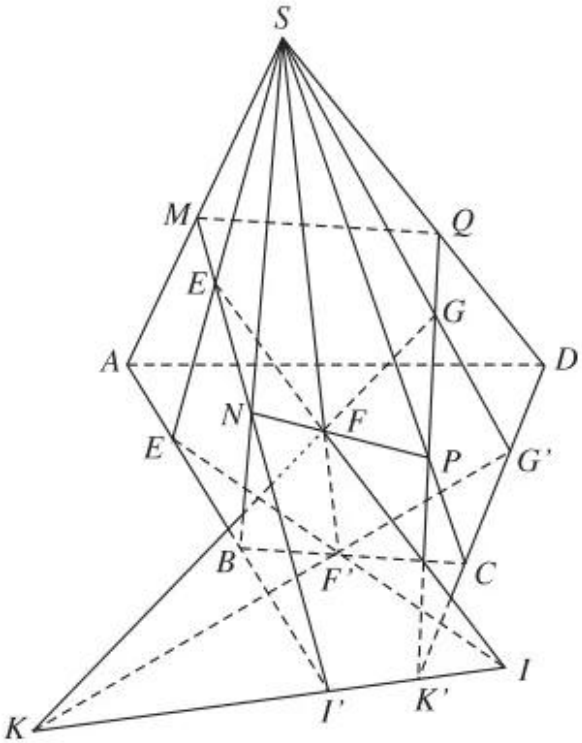
2.51. (h.2.77) Gọi $I = AN \cap CD$. Trong mặt phẳng (ABI), gọi $K = MN \cap BI$. Trong mặt phẳng (BCD), gọi $E = PK \cap CD$, $J = PK \cap BC$. Trong mặt phẳng (ACD), gọi $F = EN \cap AD$. Ta có thiết diện là tứ giác $MJEF$.



Hình 2.77

2.52. (h.2.78) Gọi $E' = SE \cap AB$, $F' = SF \cap BC$, $G' = SG \cap CD$. Trong mặt phẳng $(SE'F')$, gọi $I = EF \cap E'F'$, $K = FG \cap F'G'$. Ta có : $IK = (EFG) \cap (ABCD)$. Gọi $I' = AB \cap IK$, $K' = CD \cap IK$. Gọi $M = SA \cap I'E$, $N = SB \cap I'E$ và $P = SC \cap K'G$, $Q = SD \cap K'G$.

Thiết diện tạo bởi mp(EFG) cắt hình chóp là tứ giác $MNPQ$.



Hình 2.78

\+ ***Chú ý :*** Vị trí thiết diện có thể thay đổi tuỳ theo vị trí của E, G, F.

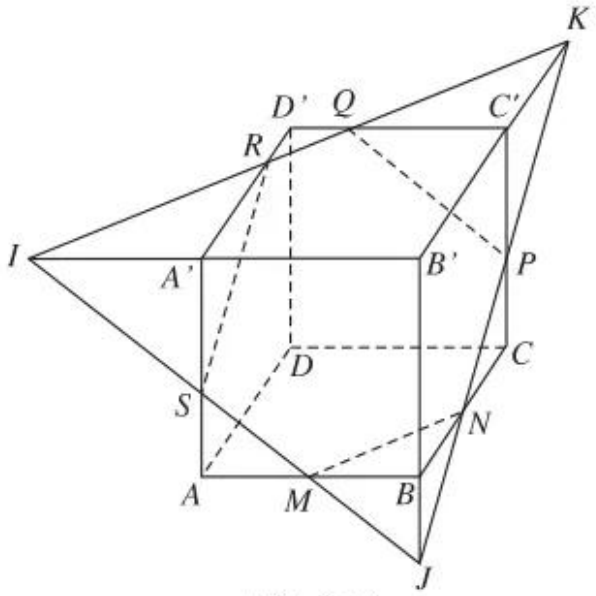
2.53. (h.2.79) a) Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, gọi $I = RQ \cap A'B'$, $K = RQ \cap B'C'$. Ta có : I, K là các điểm cần tìm.

b) Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, gọi $P = NK \cap CC'$, $J = NK \cap BB'$. Ta có : P, J là các điểm cần tìm.

c) Trong mặt phẳng $(AA'B'B)$, gọi $S = IJ \cap AA'$, $M = IJ \cap AB$. Ta có : S, M là các điểm cần tìm.

d) Như vậy giao tuyến của (NQR) với các mặt $(ABCD)$, $(BB'C'C)$, $CC'D'D)$, $(A'B'C'D')$, $(AA'D'D)$, $(AA'B'B)$ lần lượt là MN, NP, PQ, QR, RS, SM.

e) Ta có thiết diện cần tìm là lục giác $MNPQRS$.



Hình 2.79

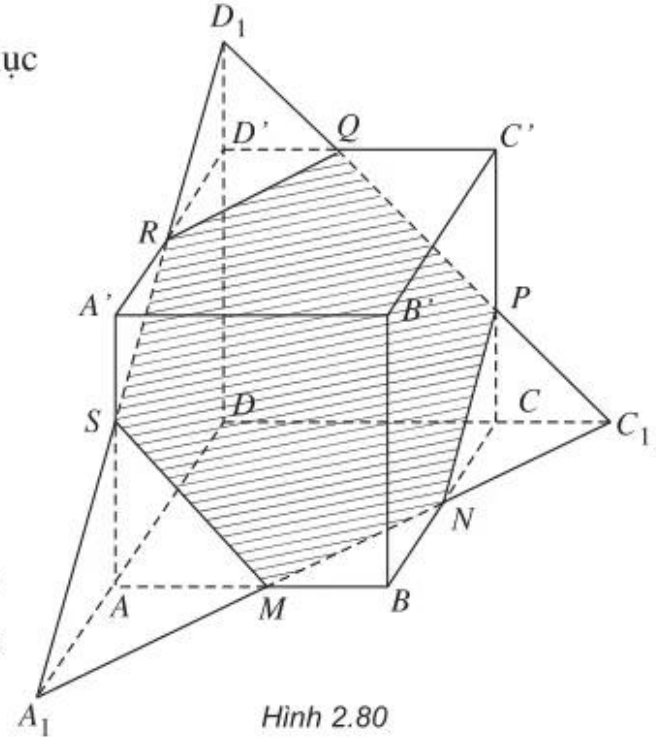
2.54. (h.2.80) + Xác định thiết diện :

Trong mặt phẳng $(DD'C'C)$, gọi $C_1 = PQ \cap CD$, $D_1 = PQ \cap DD'$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = C_1N \cap AB$, $A_1 = C_1N \cap AD$.

Trong mặt phẳng $(DD'A'A)$, gọi $R = D_1A_1 \cap A'D'$, $S = D_1A_1 \cap AA'$.

Ta có thiết diện cần tìm là lục giác $MNPQRS$.



Hình 2.80

+ Tính diện tích thiết diện :

Các đỉnh của hình lục giác là trung điểm các cạnh của hình lập phương nên chúng bằng nhau và mỗi cạnh của lục giác bằng nửa đường chéo của hình vuông có cạnh bằng a.

T a có : $MN = NP = PQ = QR = RS = SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra $\Delta D_1RQ = \Delta SA_1M = \Delta PNC_1$ (chúng là những tam giác đều).

Suy ra : $\widehat{SRQ} = \widehat{RQP} = \widehat{QPN} = \widehat{PNM} = \widehat{NMS} = \widehat{MSR} = 120^{o}$.

Khi đó, ta có lục giác $MNPQRS$ là lục giác đều.

$$S_{MNPQRS} = S_{A_1C_1D_1} - 3S_{D_1RQ} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$