II. ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

3.49. (h.3.89)

a) $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$

b) $\begin{cases} MN \,//\, AC \\ AC \perp (SBD) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SBD)$

c) + Xác định góc α giữa (SBC) và $(ABCD)$

Gọi I là trung điểm của BC, ta có :

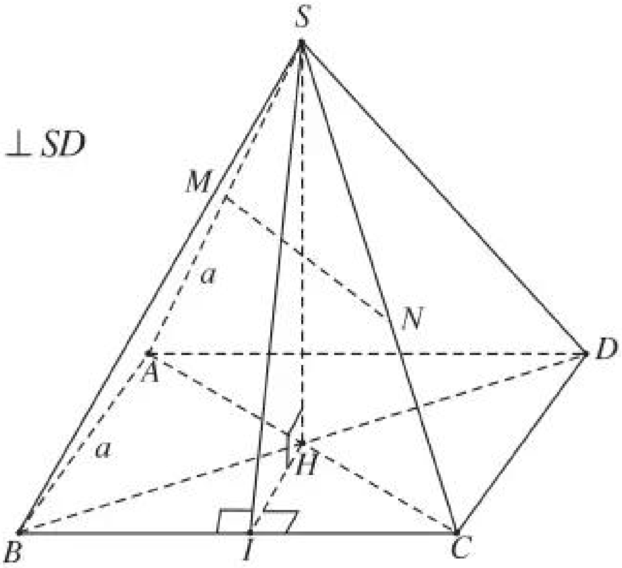
$\begin{cases} BC \perp IH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIH)$

$\Rightarrow BC \perp SI$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = \widehat{SIH} = \alpha$

+ Tính α :

Trong tam giác SIH, ta có : $\cos\alpha = \dfrac{IH}{IS} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Hình 3.89

3.50. (h. 3.90)

a) $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại B.

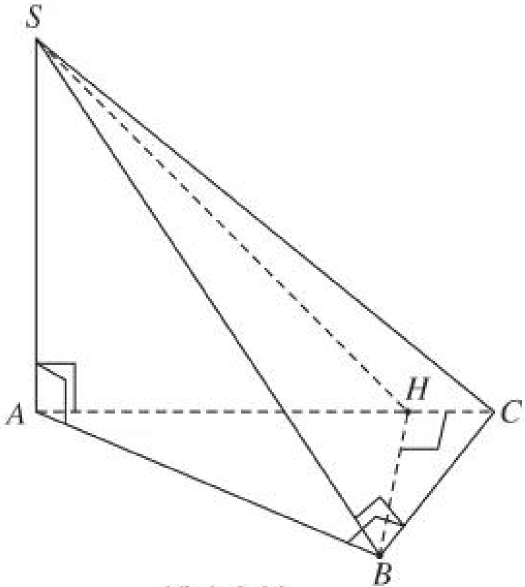
b) $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBH) \perp (SAC)$.

c) $d\left[B,(SAC)\right] = BH$. Ta có :

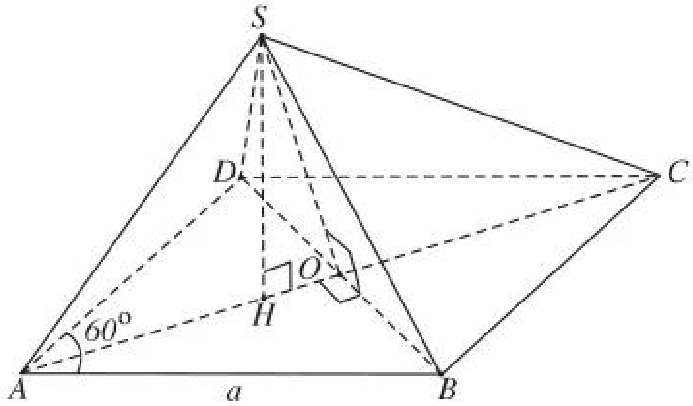
$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4a^2}$

$\Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Hình 3.90

3.51. (h. 3.91)



Hình 3.91

a) ***Nhận xét :*** Tam giác ABD là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABD), ta có :

$SA = SB = SD \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD

$\Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABD

$\Rightarrow H \in AC$

$\Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

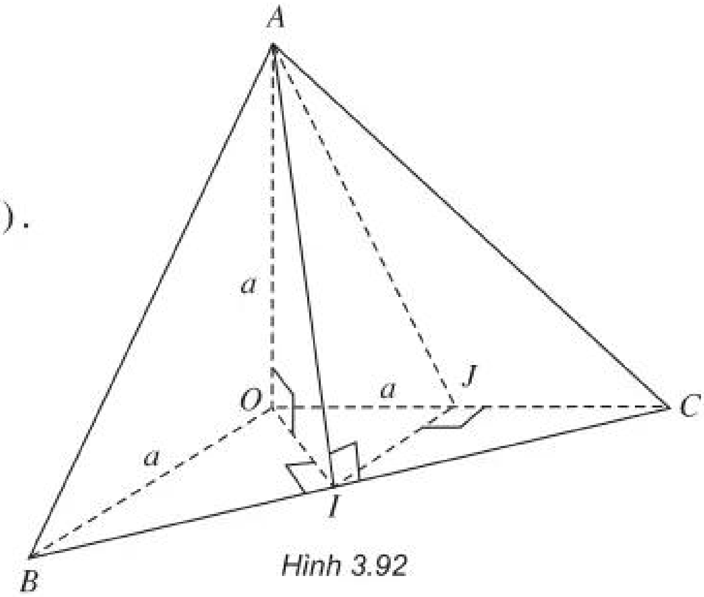
b) Ta có :

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$AH.AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = a^2 = AS^2 \Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông tại } S.$$

$$d[S, (ABCD)] = SH = \sqrt{HA.HC} = \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

3.52 (h 3.92)



Hình 3.92

a) $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAI)$

$\Rightarrow (ABC) \perp (OAI)$.

b) + Xác định góc α giữa AB và mặt phẳng (AOI)

$\begin{cases} A \in (OAI) \\ BI \perp (OAI) \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\widehat{AB,(OAI)}\right] = \widehat{BAI} = \alpha$

+ Tính α :

Trong tam giác vuông BAI, ta có : $\sin\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$.

c) + Xác định góc β giữa hai đường thẳng AI và OB :

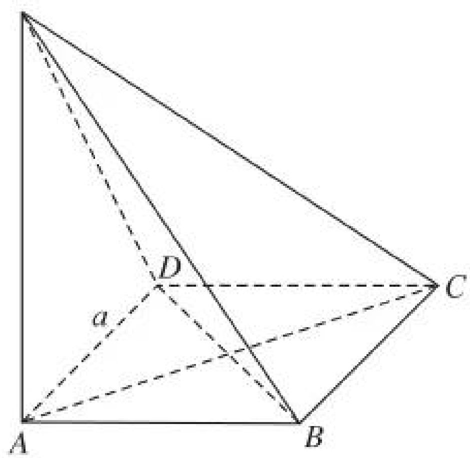
Gọi J là trung điểm OC, ta có : $IJ \,//\, OB$ và $IJ \perp (AOC)$. Như vậy :

$$\left[\widehat{AI, OB}\right] = \left[\widehat{AI, IJ}\right] = \widehat{AIJ} = \beta .$$

+ Tính góc :

Trong tam giác IJA, ta có : $\tan\beta = \dfrac{AJ}{IJ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \beta = \arctan\sqrt{5}$.

3.53. (h. 3.93)



Hình 3.93

a) $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$.

b) $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

c) + Xác định góc α giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$:

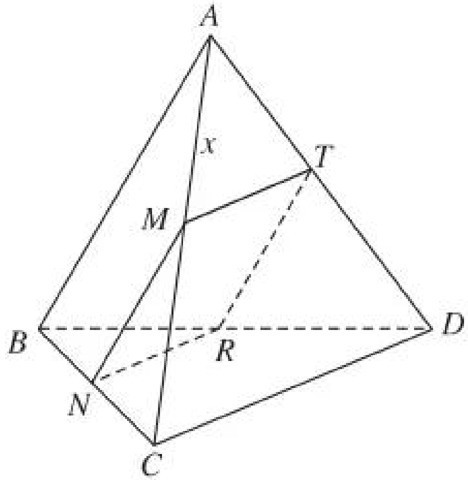
$\begin{cases} C \in (ABCD) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{SC, (ABCD)}\right] = \widehat{ACS} = \alpha$

+ Tính góc :

Trong tam giác vuông SCA, ta có :

$$\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^{o}.$$

3.54. (h. 3.94)



Hình 3.94

a) $\begin{cases} AB = (ABC) \cap (ABD) \\ (P) \,//\, AB \\ (P) \cap (ABC) = MN \\ (P) \cap (ABD) = RT \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, RT \quad (1)$

Tương tự, khi $(P) \,//\, CD$, ta có $MT \,//\, NR$ (2)

Mặt khác $\widehat{NMT} = \left(\widehat{AB, CD}\right) = 90^{o}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) cho ta $MNRT$ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích S của hình chữ nhật $MNRT$.

Ta có $S = MN.MT$

ΔABC cân tại A nên ΔMNC cân tại M. Do đó $MN = MC = a - x$.

$\Rightarrow S = (a-x)x \ (0 \le x \le a)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$S = (a-x)x \le \left(\frac{(a-x)+x}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi : $a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AC.

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $S = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

c) $S = \dfrac{2a^2}{9} \Leftrightarrow (a-x)x = \dfrac{2a^2}{9} \Leftrightarrow x^2 - ax + \dfrac{2a^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2a}{3} \in [0\,;\,a] \\ x = \dfrac{a}{3} \in [0\,;\,a] \end{array}\right.$

3.55. (h. 3.95)

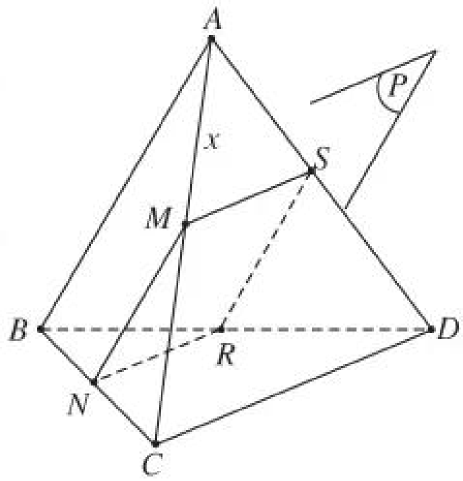
a) $\begin{cases} (P) \,//\, AB \\ AB = (ABC) \cap (ABD) \\ (P) \cap (ABC) = MN \\ (P) \cap (ABD) = RS \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, RS$ (1)

Tương tự khi $(P) \,//\, CD$, ta có : $MS \,//\, NR$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta : $MNRS$ là hình bình hành.

Ta có : $MNRS$ là hình chữ nhật khi $MN \perp MS \Leftrightarrow AB \perp CD$.

b) Theo câu trên, ta có $MNRS$ là hình chữ nhật, nên



Hình 3.95

$S_{(MNRS)} = MN.MS$

ΔCMN và ΔCAB đồng dạng nên $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} \Rightarrow MN = \dfrac{a}{c}(c-x)$

ΔAMS và ΔACD đồng dạng nên $\dfrac{MS}{CD} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow MS = \dfrac{b}{c}.x$

Vậy $S_{(MNRS)} = \frac{ab}{c^2}x(c-x)$ ở đây $0 \le x \le c$.

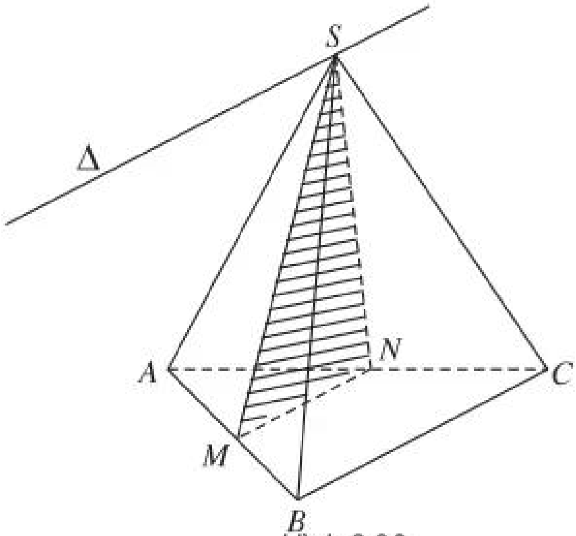
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x và $c-x$, ta có :

$$S_{(MNRS)} = \frac{ab}{c^2}x(c-x) \le \frac{ab}{c^2}\left[\frac{x+(c-x)}{2}\right]^2 = \frac{ab}{c^2}.\frac{c^2}{4} = \frac{ab}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{(MNRS)}$ là $\frac{ab}{4}$ khi M là trung điểm của đoạn thẳng AC.

3.56. (h. 3.96)



Hình 3.96

a) Ta có $S.ABCD$ là tứ diện đều và :

$$\begin{cases}(P) \,//\, BC \\ (ABC) \supset BC \\ (P) \cap (ABC) = MN\end{cases}$$

$\Rightarrow MN \,//\, BC \Rightarrow AM = AN$.

Mặt khác $\Delta SAM = \Delta SAN$,

do đó $SM = SN \Rightarrow \Delta SMN$ cân tại S.

b) $\begin{cases}(P) \,//\, BC \\ (SBC) \supset BC \\ S \in (P) \\ S \in (SBC)\end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = \Delta$ (Δ qua S và song song với BC).

Do S, BC cố định nên Δ cố định. Ta có mặt phẳng (P) luôn luôn đi qua đường thẳng Δ cố định.

c) Trong ΔSAM, ta có :

$SM^2 = SA^2 + AM^2 - 2SA.AM.\cos 60^o = a^2 + x^2 - ax$.

Mặt khác vì ΔAMN đều nên $MN = AM = x$.

Vậy $y = 2SM^2 + MN^2 = 2(a^2 + x^2 - ax) + x^2 = 3x^2 - 2ax + 2a^2$

Ta có $y = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax + 2a^2 = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{6}. \end{array}\right.$