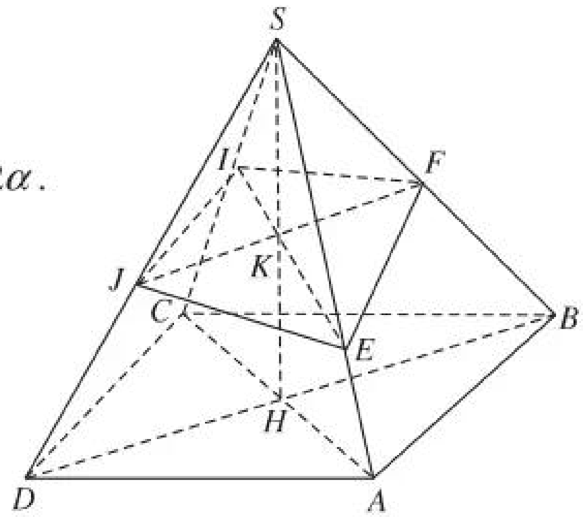
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

I. ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP



Hình 4.1

1. (h.4.1) a) $S_{SEI} = \dfrac{1}{2}SE.SI.\sin 2\alpha = \dfrac{ac}{2}\sin 2\alpha$.

b) $S_{SIE} = S_{SIK} + S_{SKE}$

$\Leftrightarrow \dfrac{ac}{2}\sin 2\alpha = \dfrac{kc}{2}\sin\alpha + \dfrac{ak}{2}\sin\alpha$

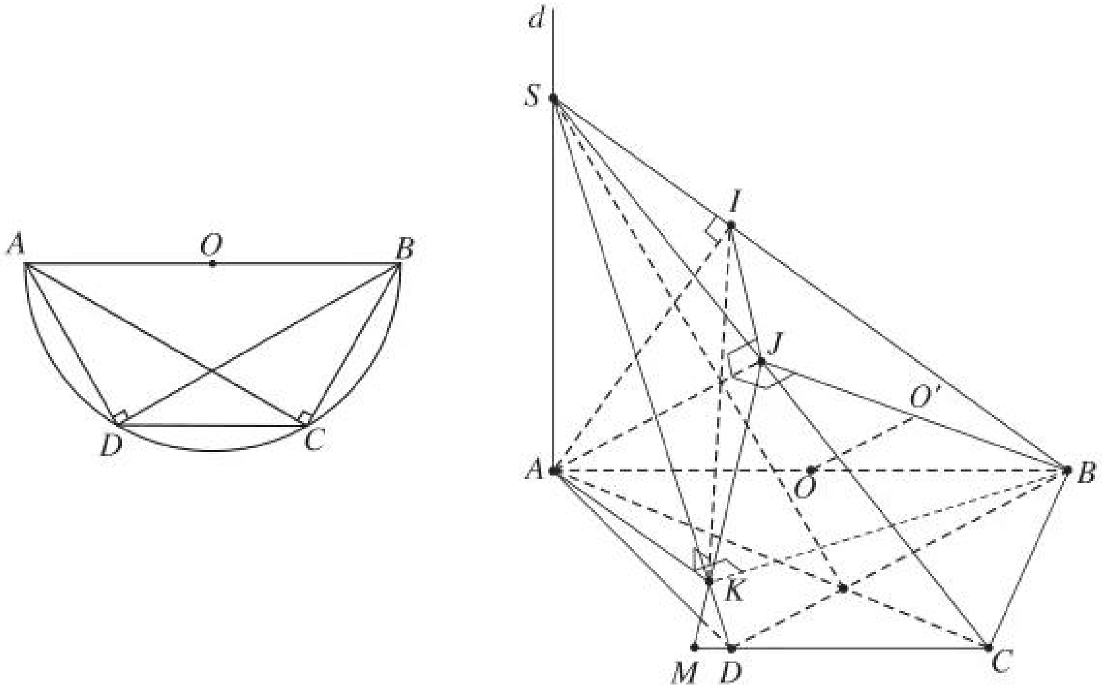
$$\Leftrightarrow \frac{ac}{2}.2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{kc}{2}\sin\alpha + \frac{ak}{2}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2ac\cos\alpha = k(a+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{ac} = \frac{2\cos\alpha}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{c} = \frac{2\cos\alpha}{k}.$$

Tương tự, ta có : $\frac{1}{b}+\frac{1}{d} = \frac{2\cos\alpha}{k} = \frac{1}{a}+\frac{1}{c}$.

2. (h. 4.2)



Hình 4.2

Nhận xét

Hình thang *ABCD* có hai cạnh bên và đáy nhỏ bằng nhau và bằng nửa đáy lớn, nên nó là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính *AB*, tâm *O* là trung điểm của *AB*.

Như vậy : $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 1v$.

a) Theo giả thiết, ta có : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \qquad (1)$$

Mặt khác $SB \perp (P)$ nên $SB \perp IJ \left(\subset (P)\right)$ $\qquad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra *BCJI* là tứ giác nội tiếp trong đường tròn đường kính *BJ*.

Ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ\left(\subset (SAC)\right)$

$$\begin{cases} AJ \perp BC \\ AJ \perp SB \ \ (do\ SB \perp (P)) \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (SBC) \Rightarrow AJ \perp IJ\left(\subset (SBC)\right) \qquad (3)$$

Lí luận tương tự, ta có :

$$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AK\left(\subset (SAD)\right)$$

$$\begin{cases} AK \perp BD \\ AK \perp SB\left(\subset (P)\right) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow AK \perp KI \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $AKJI$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính AI nằm trong mặt phẳng (P).

b) Ta có ngay O' là trung điểm BJ.

Vì OO' là đường trung bình của ΔABJ nên $OO' \,//\, AJ$.

Mà $AJ \perp (SBC)$ nên $OO' \perp (SBC)$.

c) Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$.

Gọi $M = JK \cap CD$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM\left(\subset (ABCD)\right) \qquad (5)$$

$$SB \perp (P) \Rightarrow SB \perp AM\left(\subset (P)\right) \qquad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có : $AM \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp AB$.

Suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại A. Như vậy AM cố định. Vì $M = AM \cap CD$ nên M cố định.

d) ΔAIB vuông tại I nên $OA = OB = OI$

ΔAJB vuông tại J (do $AJ \perp (SBC)$ nên $OA = OB = OJ$)

ΔAKB vuông tại K (do $AK \perp (SBD)$ nên $OA = OB = OK$).

Ta có $OA = OB = OC = OD = OI = OJ = OK$ nên O là điểm cách đều các điểm đã cho và $OA = \dfrac{AB}{2} = a$.

e) Theo chứng minh câu c.

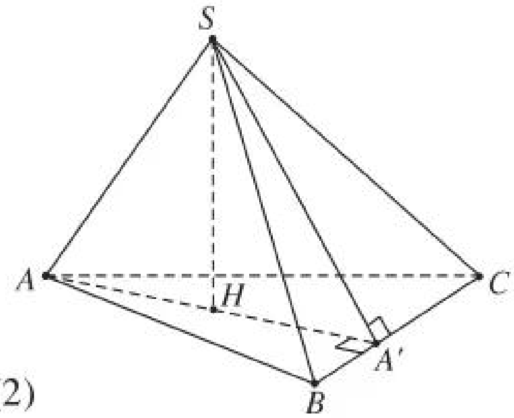
f) Khi S thay đổi trên d, ta có I luôn nằm trong mặt phẳng (B, d).

Trong mặt phẳng này I luôn nhìn đoạn AB cố định dưới góc vuông nên tập hợp I là đường tròn (C_1) đường kính AB nằm trong mặt phẳng (B, d).

Tương tự, tập hợp J là đường tròn (C_2) đường kính AC nằm trong mặt phẳng (C, d) và tập hợp K là đường tròn đường kính AD nằm trong mặt phẳng (D, d).

3. (h. 4.3)

a) Ta chứng minh : $\begin{cases} CH \perp AB \\ AH \perp BC \end{cases}$



Hình 4.3

Ta có : $\begin{cases} AB \perp SC \ \text{(do } SH \perp (ABC)) \\ AB \perp SH \ \text{(do } SC \perp (SAB)) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp CH \qquad (1)$

Tương tự, ta có $BC \perp (SAH)$, nên $AH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta H là trực tâm ΔABC .

b) Giả sử CH kéo dài cắt AB tại C', ta có

$\begin{cases} AB \perp CC' \ \text{(do } H \text{ là trực tâm)} \\ AB \perp SC' \ \text{(do } AB \perp (SCH)) \end{cases}$

Trong tam giác SCC', ta có $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SC'^2} + \dfrac{1}{SC^2}$ (3)

Mà SC' là đường cao trong tam giác vuông SAB nên $\dfrac{1}{SC'^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}$ (5)

c) $S_{HBC}.S_{ABC} = \left(\dfrac{1}{2}HA'.BC\right)\left(\dfrac{1}{2}AA'.BC\right)$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{HA'.AA'}_{SA'^2}.BC^2 = \left(\frac{1}{2}SA'.BC\right)^2 = \left(S_{SBC}\right)^2 \qquad (6)$$

Tương tự, ta có $\left(S_{SCA}\right)^2 = S_{HCA}.S_{ABC}$ (7)

$$\left(S_{SAB}\right)^2 = S_{HAB}.S_{ABC} \quad (8)$$

Cộng (6), (7), (8) vế theo vế, ta có

$$\left(S_{SBC}\right)^2 + \left(S_{SCA}\right)^2 + \left(S_{SAB}\right)^2 = S_{ABC}\underbrace{\left(S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}\right)}_{S_{ABC}} = \left(S_{ABC}\right)^2.$$

d) Với G là trọng tâm ΔABC , ta có :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2\right)$$

$$\Rightarrow SG^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(SA^2 + SB^2 + SC^2\right)$$

$\left(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0\right).$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có : $2AB.BC \le AB^2 + BC^2$

$$2CA.AB \le CA^2 + AB^2$$

$$2BC.CA \le BC^2 + CA^2$$

Suy ra $(AB + BC + CA)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(AB.BC + BC.CA + CA.AB\right)$

$$\le 3\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$$

$$\le 3\left(SA^2 + SB^2 + SB^2 + SC^2 + SC^2 + SA^2\right)$$

$$\le 6\left(SA^2 + SB^2 + SC^2\right).$$

e) Đặt $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$

Trong ΔABC , ta có : $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} > 0$.

Tương tự $\cos B > 0,\ \cos C > 0$.

Vậy ΔABC có ba góc nhọn.

Mặt khác, ta có : $SA^4\tan^2 A = a^4\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right) = a^4\left[\dfrac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^4}-1\right]$

$$= (a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

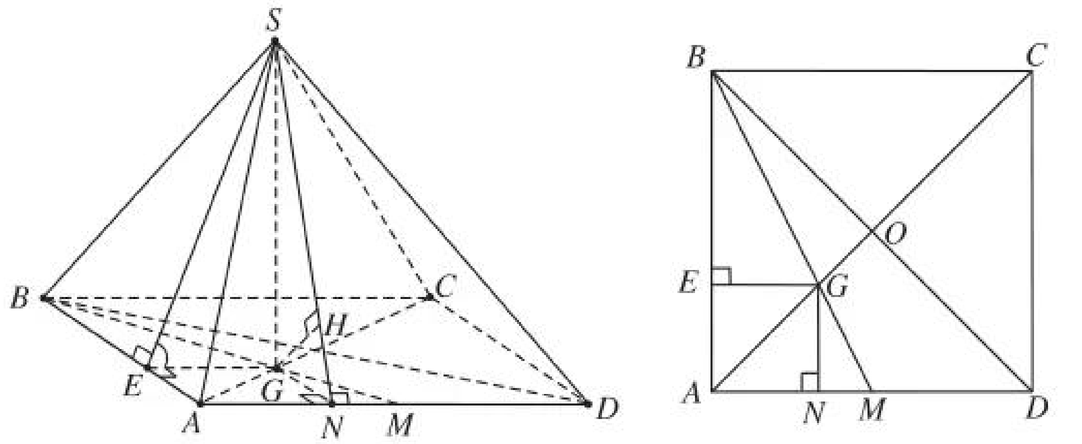
$$= 4\left(S_{SAB}^2+S_{SBC}^2+S_{SCA}^2\right) = 4\left(S_{ABC}\right)^2$$

$\Rightarrow SA^2\tan A = 2S_{ABC}$.

Tương tự, ta có : $SB^2\tan B = SC^2\tan C = 2S_{ABC}$.

Vậy $SA^2\tan A = SB^2\tan B = SC^2\tan C = 2S_{ABC}$.

4. (h. 4.4)



Hình 4.4

+ Xác định góc của *(SAB)* và mặt phẳng đáy.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD và E là hình chiếu của G lên AB. Ta có :

$$\begin{cases} AB \perp SG \\ AB \perp GE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEG) \Rightarrow AB \perp SE$$

$$\begin{cases} SE \perp AB \\ GE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left[(SAB),(ABCD)\right]} = \widehat{SEG} = 60^{\circ}.$$

+ Xác định khoảng cách từ B đến mặt phẳng *(SAD)*.

Hạ $GN \perp AD$. Tương tự như trên, ta có :

$$\begin{cases} AD \perp GN \\ AD \perp SG \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SGN)$$

Hạ $GH \perp SN$, ta có $GH \perp (SAD)$ suy ra khoảng cách từ G đến *(SAD)* là GH.

+ Tính GH.

Trong tam giác vuông SGN, ta có : $\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GS^2} + \dfrac{1}{GN^2}$ (1)

Do GN // AB nên $\dfrac{GN}{BA} = \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{1}{3}$. Ta có : $GN = \dfrac{BA}{3} = \dfrac{a}{3}$.

Trong tam giác SGE, ta được $GS = GE.\tan 60^{\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

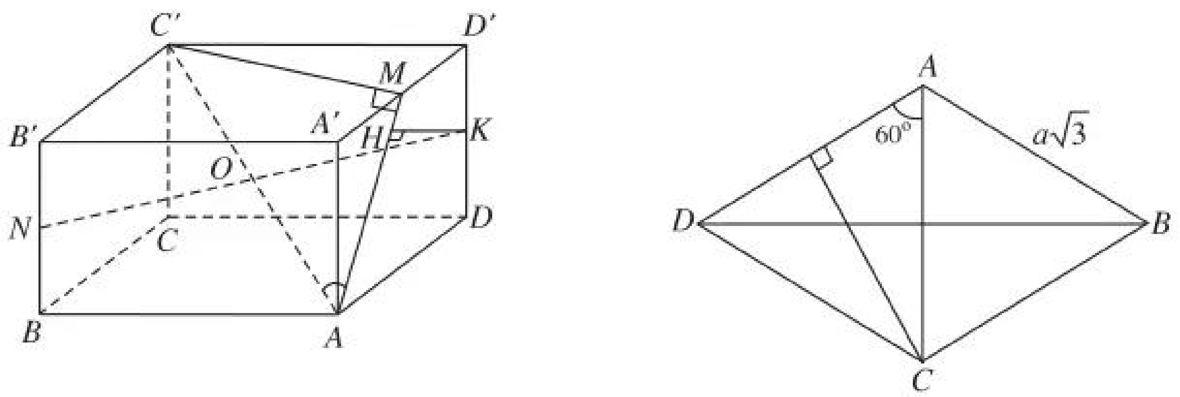
(do $GE = GN$). Thế vào (1) ta được :

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}.\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow GH^2 = \frac{3\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có : $\begin{cases} M \in (SAD) \\ MB = 3MG \end{cases} \Rightarrow d\big(B,(SAD)\big) = 3d\big(G,(SAD)\big) = 3\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

5. (h. 4.5a ; h. 4.5b)



Hình 4.5a

Nhận xét :

Do tam giác $A'B'D'$ là tam giác đều nên $C'M \perp A'D'$

$$\begin{cases}(C'A'D') \perp (AA'D'D) \\ (C'A'D') \cap (AA'D'D) = A'D'\end{cases} \Rightarrow C'M \perp (AA'D'D)$$

Nên $\widehat{\left[AC',(AA'D'D)\right]} = \widehat{C'AM} = 30^{\circ}$.

Gọi K là trung điểm của DD', ta có $AKC'N$ là hình bình hành nên K và N đối xứng nhau qua trung điểm O của AC'. Mà $O \in (AMC')$, do đó

$$d\left[\left(N,(C'MA)\right]\right] = d\left[K,(C'MA)\right].$$

+ Xác định khoảng cách từ K đến $(C'MA)$.

Do $(C'MA)$ vuông góc với $(AA'D'D)$ theo giao tuyến AM nên kẻ $KH \perp AM$, ta có $KH \perp (C'MA)$ hay $d\left[K,(C'MA)\right] = KH$.

+ Tính KH.

Ta có : $S_{AMK} = S_{AA'D'D} - \left(S_{AA'M} + S_{MD'K} + S_{ADK}\right)$ (1)

Trong tam giác AMC', ta có : $AM = C'M \cot 30^{\circ} = a\sqrt{3}.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).\sqrt{3} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

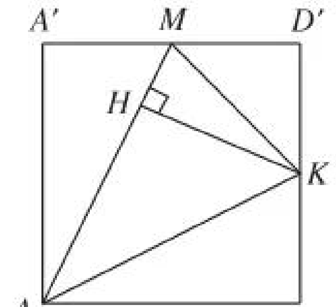
Trong tam giác $AA'M$, ta có : $AA' = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = a\sqrt{6}$.

Ta có : $S_{AA'D'D} = a\sqrt{6}.a\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{2}$

$$S_{AA'M} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{MD'K} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$$

$$S_{ADK} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}.$$



Hình 4.5b

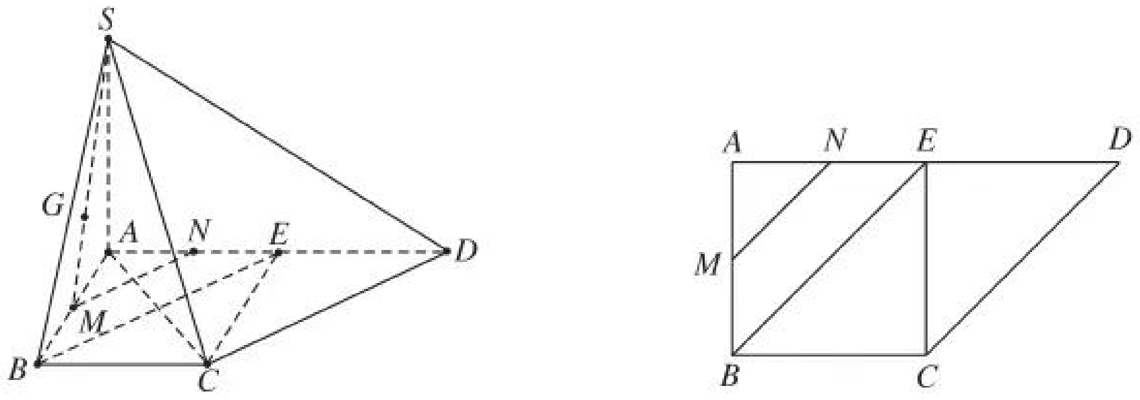
Thế vào (1), ta có : $S_{AMK} = 3a^2\sqrt{2} - \left(\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4} + \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{8} + \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}\right)$

$$= 3a^2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9a^2\sqrt{2}}{8}.$$

Mà $S_{AMK} = \dfrac{1}{2} AM.KH$ nên $KH = \dfrac{2S_{AMK}}{AM}$ hay $KH = \dfrac{2\left(\dfrac{9a^2\sqrt{2}}{8}\right)}{\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d\left[N,(C'MA)\right] = d\left[K,(C'MA)\right] = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

6. (h. 4.6)



Hình 4.6

+ Xác định góc của *SC* với *(SAD)*.

Hạ $CE \perp AD$, ta có *E* là trung điểm *AD* và $CE \perp (SAD)$ nên $\widehat{CSE} = 30^o$.

$\widehat{CSE}$ cũng chính là góc giữa *SC* và mp(*SAD*).

Trong ΔCSE, ta có :

$$SE = CE \tan 60^o = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{SE^2 - AE^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Nhận xét

Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AE*.

Ta có *MN // BE* nên *MN // CD*. Như vậy *MN // (SCD)*. Ta suy ra

$$d\left(M,(SCD)\right) = d\left(N,(SCD)\right).$$

Mà $\dfrac{DN}{DA} = \dfrac{3}{4}$ nên $d\left(N,(SCD)\right) = \dfrac{3}{4} d\left(A,(SCD)\right)$.

+ Xác định khoảng cách từ *A* đến *(SCD)*.

Vì tam giác ACD vuông cân tại C nên CD vuông góc với AC.

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC).$$

Hạ $AH \perp SC$, ta có $AH \perp (SCD)$.

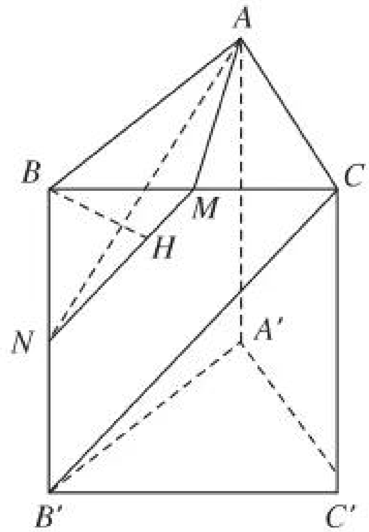
Trong tam giác SAC, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

Ta có : $\begin{cases} S \in (SCD) \\ \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ nên $d\big(G,(SCD)\big) = \dfrac{2}{3} d\big(M,(SCD)\big)$.

Như vậy $d\big(G,(SCD)\big) = \dfrac{2}{3} d\big(N,(SCD)\big) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}.d\big(A,(SCD)\big) = \dfrac{a}{2}$.

7. (h.4.7)



Hình 4.7

Gọi N là trung điểm của BB', ta có : $CB' \parallel MN$ nên $CB' \parallel (AMN)$. Như vậy

$$d\big(B'C,\ AM\big) = d\big(B',\ (AMN)\big) = d\big(B,\ (AMN)\big)$$

(vì B, B' đối xứng qua $N \in (AMN)$).

Hạ $BH \perp (AMN)$, ta có $d\big(B,(AMN)\big) = BH$.

Nhận xét :

Tứ diện $B.AMN$ có ba cạnh BA, BM, BN vuông góc nhau từng đôi một nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

8. (h.4.8)

Gọi P là trung điểm SA, ta có $MPCN$ là hình bình hành.

Như vậy $MN \parallel PC$, suy ra $MN \parallel (SAC)$.

Do $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MN$.

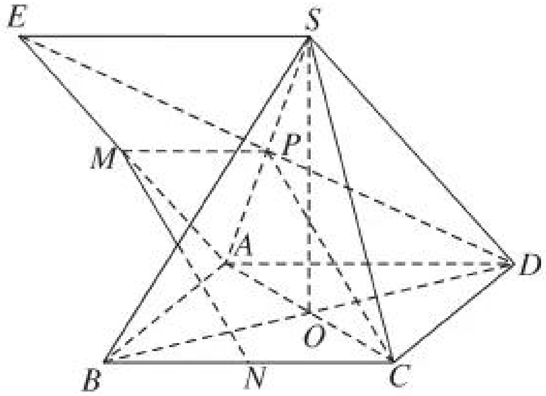
Ta có : $d\left(MN, AC\right) = d\left(N, (SAC)\right)$.

Mà $\begin{cases} C \in (SAC) \\ \dfrac{CN}{CB} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

nên $d\left(N, (SAC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(B, (SAC)\right) = \dfrac{1}{2} BO$

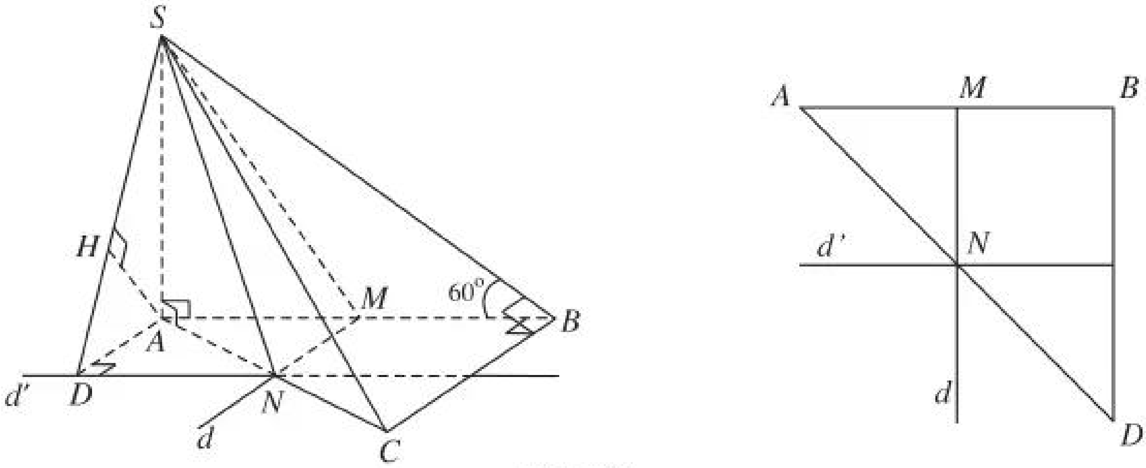
(O là giao điểm của AC và BD).

Vậy $d\left(N, (SAC)\right) = \dfrac{1}{4} a\sqrt{2}$.



Hình 4.8

9. (h.4.9)



Hình 4.9

Nhận xét

Gọi (α) là mặt phẳng qua SM và song song với BC.

Ta có BC // (α) và (ABC) là mặt phẳng chứa BC nên (ABC) sẽ cắt (α) theo giao tuyến d đi qua M và song song với BC. d cắt AC tại N.

Ta có (α) chính là mặt phẳng (SMN). Vì M là trung điểm AB nên N là trung điểm AC.

+ Xác định khoảng cách.

Qua N kẻ đường thẳng d' song song với AB.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua SN và d'.

Ta có : AB // (P).

Khi đó : $d\left(AB, SN\right) = d\left(A, (P)\right)$.

Dựng $AD \perp d'$, ta có AB // (SDN). Kẻ AH vuông góc với SD, ta có $AH \perp (SDN)$ nên :

$$d(AB, SN) = d(A, (SND)) = AH.$$

Trong tam giác SAD, ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2}$ (1)

Trong tam giác SAB, ta có $SA = AB \tan 60^{\circ} = 2a\sqrt{3}$ và $AD = MN = \frac{BC}{2} = a$.

Thế vào (1), ta được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$