

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. ĐỀ TOÁN TỔNG HỢP

- Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là chân đường cao của hình chóp. Một mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại E, F, I, J . Gọi $K = EI \cap FJ$. Đặt $SE = a, SF = b, SI = c, SJ = d, SK = k, \widehat{ASH} = \alpha$.
 - Tìm diện tích của tam giác SEI theo a, c, α .
 - Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2 \cos \alpha}{k}$. Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.
- Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = 2a, BC = CD = DA = a$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A . Gọi S là một điểm thay đổi trên d . (P) là một mặt phẳng qua A vuông góc với SB tại I và cắt SC, SD lần lượt tại J, K .
 - Chứng minh tứ giác $BCJI, AIJK$ là các tứ giác nội tiếp.
 - Gọi O là trung điểm của AB, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCJI$. Chứng minh rằng $OO' \perp (SBC)$.
 - Chứng minh rằng khi S thay đổi trên d thì JK luôn luôn đi qua một điểm cố định.
 - Tìm một điểm cách đều các điểm A, B, C, D, I, J, K và tìm khoảng cách đó.
 - Gọi M là giao điểm của JK và $(ABCD)$. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 - Khi S thay đổi trên d , các điểm I, J, K lần lượt chạy trên đường nào.
- Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp (ABC) .
 - Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC .
 - Chứng minh rằng $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$.
 - Chứng minh rằng $(S_{SBC})^2 = (S_{HBC}) \cdot (S_{ABC})$ và
$$(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2.$$

d) Chứng minh rằng

$$SG^2 = \frac{1}{9}(SA^2 + SB^2 + SC^2) \quad (G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC) \text{ và}$$

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(SA^2 + SB^2 + SC^2).$$

e) Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn và

$$SA^2 \tan A = SB^2 \tan B = SC^2 \tan C = 2S_{ABC}.$$

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu của S lên đáy $ABCD$ trùng với trọng tâm tam giác ABD . Mặt bên (SAB) tạo với đáy góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) .
5. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ là 30° . Gọi M là trung điểm $A'D'$, N là trung điểm BB' . Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng $(C'MA)$.
6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SC tạo với (SAD) góc 30° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) .
7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , $B'C$.
8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA , M là trung điểm AE , N là trung điểm BC . Chứng minh rằng MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .
9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy (ABC) . Gọi M là trung điểm AB , mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N . Biết góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là 60° . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN .