§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mở đầu về hình học không gian

Trong chương trình hình học lớp 10 và chương I của lớp 11, ta chỉ nói đến những hình trong mặt phẳng như : tam giác, đường tròn, vectơ, ... Chúng được gọi là những *hình phẳng*. Nhưng xung quanh chúng ta còn có các hình không nằm trong mặt phẳng như : cây bút chì (h.28), quyển sách (h.29), quả bóng (h.30), ngôi nhà (h.31), ...

Hình 28

Hình 29

Hình 30

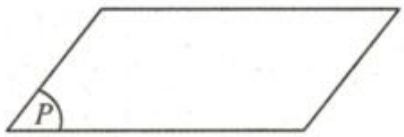
Hình 31

Môn học nghiên cứu các tính chất của những hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng gọi là Hình học không gian.

Mặt phẳng

Trang giấy, mặt bảng đen, mặt tường lớp học, mặt hồ lặng gió, mặt bàn, tấm gương phẳng, ... cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành (h.32) và dùng một chữ cái đặt trong dấu ngoặc ( ) để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví dụ : mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) ... và viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β) ... hoặc (P), (Q), (α), (β) ...



Hình 32

Điểm thuộc mặt phẳng

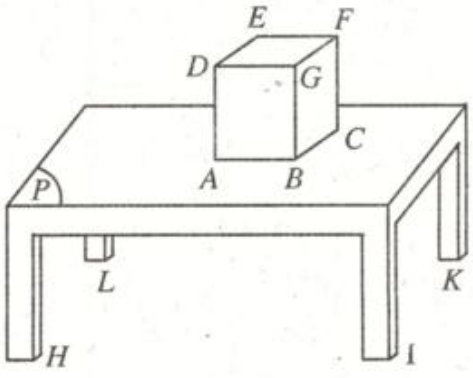
Ta biết rằng khi cho điểm A và đường thẳng a thì hoặc điểm A thuộc đường thẳng a, hoặc điểm A không thuộc đường thẳng a.

Tương tự như vậy, với một điểm A và một mặt phẳng (P), cũng có hai khả năng xảy ra :

– Hoặc điểm A thuộc mp(P), khi đó ta kí hiệu $A \in \text{mp}(P)$ hay $A \in (P)$.

– Hoặc điểm A không thuộc mp(P), ta còn nói điểm A ở ngoài mp(P) và kí hiệu $A \notin \text{mp}(P)$ hay $A \notin (P)$.

?1 *Hãy quan sát hình 33. Xem mặt bàn là một phần của mặt phẳng (P). Trong các điểm $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L$, điểm nào thuộc mặt phẳng (P) và điểm nào không thuộc mặt phẳng (P) ?*

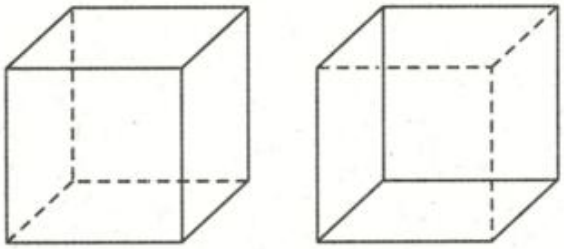


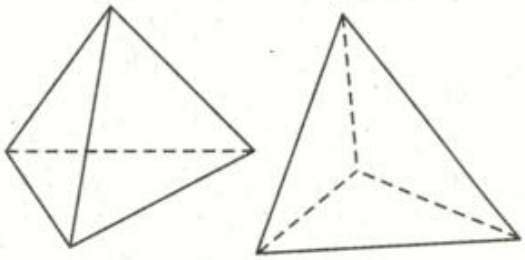
Hình 33

Khi điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta còn nói : "*điểm A nằm trên mặt phẳng (P)*" hay "*điểm A nằm trong mặt phẳng (P)*", hoặc còn nói "*mặt phẳng (P) đi qua điểm A*" hay "*mặt phẳng (P) chứa điểm A*".

Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Hình lập phương là hình nằm trong không gian, nó có sáu mặt là hình vuông. Hình tứ diện cũng là hình nằm trong không gian, nó có bốn mặt là tam giác. Để dễ hình dung, người ta tìm cách vẽ chúng thành những hình phẳng, gọi là ***hình biểu diễn*** của các hình không gian đó.


Hai hình biểu diễn của hình lập phương
Hình 34


Hai hình biểu diễn của hình tứ diện
Hình 35

Hình lập phương, hình tứ diện không phải là những hình phẳng nhưng các hình biểu diễn của chúng được vẽ trên mặt phẳng. Tuy thế, các hình biểu diễn cũng tạo cho chúng ta cảm giác như đang nhìn thấy hình lập phương, hình tứ diện.

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, người ta đưa ra những quy tắc thường được áp dụng như :

– Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.

– Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

– Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A′ thuộc đường thẳng a′, trong đó a′ biểu diễn cho đường thẳng a.

– Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - -) để biểu diễn cho những đường bị khuất.

Các quy tắc khác, chúng ta sẽ được học sau.

1

Vẽ hình biểu diễn của mp(P) và một đường thẳng a xuyên qua nó.

2

Vẽ một số hình biểu diễn của hình tứ diện. Có thể vẽ hình biểu diễn của hình tứ diện mà không có nét đứt đoạn nào hay không ?

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất sau đây của hình học không gian.

Tính chất thừa nhận 1

> *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

Như vậy, hai điểm phân biệt A, B xác định duy nhất một đường thẳng. Đường thẳng đó được kí hiệu là đường thẳng AB hoặc ngắn gọn là AB.

Tính chất thừa nhận 2

> *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Như vậy, ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định duy nhất một mặt phẳng. Mặt phẳng đó được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) hay mp(ABC) hay ngắn gọn là (ABC).

Trong thực tế, kiềng ba chân hoặc các giá đỡ ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo tính chất thừa nhận 2, ba điểm không thẳng hàng nào cũng xác định một mặt phẳng.

Kiềng ba chân
Hình 36

Giá đỡ ba chân
Hình 37

Tính chất thừa nhận 3

> *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Nếu có nhiều điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó ***đồng phẳng***, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng ***không đồng phẳng***.

Như vậy, tính chất thừa nhận 3 có thể được phát biểu như sau : *Tồn tại bốn điểm không đồng phẳng.*

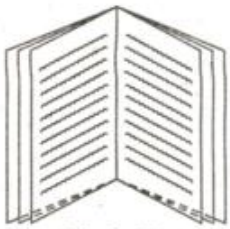
3
Giả sử (P) là một mặt phẳng nào đó. Chứng minh rằng có ít nhất một điểm không thuộc mp(P).

Tính chất thừa nhận 4

> *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung A. Theo tính chất thừa nhận 4 thì (P) và (Q) có đường thẳng chung duy nhất a đi qua điểm A. Đường thẳng a đó được gọi là ***giao tuyến của hai mặt phẳng*** (P) và (Q), còn nói hai mặt phẳng (P) và (Q) ***cắt nhau*** theo giao tuyến a, kí hiệu $a = (P) \cap (Q)$.

?2 *Quyển vở ghi bài đang ở trước mặt các em* (h.38). *Hai bìa vở là hình ảnh của hai mặt phẳng phân biệt. Vậy giao tuyến của chúng là gì ?*



Hình 38

Tính chất thừa nhận 5

Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Ta sẽ thấy rằng trong không gian có nhiều mặt phẳng khác nhau. Tính chất thừa nhận 5 khẳng định rằng trong bất kì mặt phẳng nào, ta đều có thể áp dụng các kết quả của hình học phẳng.

Trên đây là các tính chất được thừa nhận mà không chứng minh. Tiếp theo là ví dụ về một định lí được chứng minh dựa vào một số tính chất đó.

ĐỊNH LÍ

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

Chứng minh. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt của mặt phẳng (P), Δ là đường thẳng đi qua A và B.

Theo tính chất thừa nhận 5, trong mặt phẳng (P) có một đường thẳng Δ' đi qua A và B. Theo tính chất thừa nhận 1 thì Δ trùng với Δ', do đó Δ nằm trong mp(P). □

Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì ta còn nói *a nằm trên (P)*, hoặc *(P) đi qua a*, hoặc *(P) chứa a* và kí hiệu là $a \subset (P)$, hoặc $(P) \supset a$.

?3 *Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt thì ta phải tìm bao nhiêu điểm chung của chúng ?*

4

Trong mp(P) cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh AB và CD không song song ; ngoài mp(P) cho một điểm S. Hãy tìm giao tuyến của :

a) Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) ;

b) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ví dụ 1

Cho bốn điểm O, A, B, C, không đồng phẳng. Trên các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác O sao cho các đường thẳng sau đây cắt nhau : BC và B'C', CA và C'A', AB và A'B'.

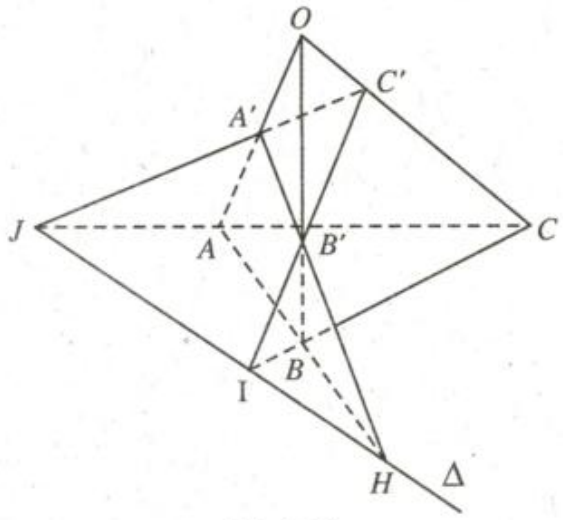
a) Hãy xác định giao điểm của mỗi đường thẳng A'B', B'C', C'A' với mp(ABC).

b) Chứng minh rằng các giao điểm trên thẳng hàng.

Giải (h.39)

a) Giả sử đường thẳng $A'B'$ cắt đường thẳng AB tại điểm H. Khi đó điểm H thuộc cả hai đường thẳng $A'B'$ và AB. Mặt khác, đường thẳng AB nằm trong mp(ABC) nên H chính là giao điểm của đường thẳng $A'B'$ với mp(ABC).

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của các đường thẳng $B'C'$ và BC, $C'A'$ và CA thì I, J theo thứ tự chính là giao điểm của $B'C'$, $C'A'$ với mp(ABC).



Hình 39

b) Theo câu a), ta có H, I, J lần lượt thuộc các đường thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ nên chúng cùng thuộc mp$(A'B'C')$. Mặt khác H, I, J cùng thuộc mp(ABC). Theo tính chất thừa nhận 4, ba điểm H, I, J thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng phân biệt $(A'B'C')$ và (ABC) nên chúng phải thẳng hàng. □

☞ CHÚ Ý 1

Qua ví dụ trên, ta thấy :

• Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P), ta tìm một đường thẳng nào đó nằm trên (P) mà cắt d. Khi đó, giao điểm của hai đường thẳng này là giao điểm cần tìm.

• Muốn chứng minh các điểm thẳng hàng, ta có thể chứng tỏ rằng chúng là những điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Ta đã biết rằng : Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng (tính chất thừa nhận 2) (h.40).

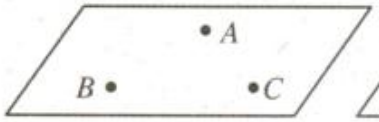
Điều này có nghĩa là

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

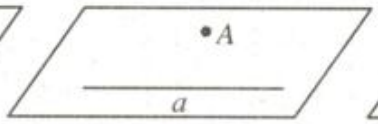
Mặt khác, nếu đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì nằm trên mặt phẳng ấy. Từ đó và từ điều kiện xác định mặt phẳng nói trên, ta còn suy ra (h.41, h.42) :

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

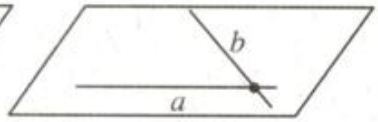
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.



Hình 40



Hình 41



Hình 42

Kí hiệu

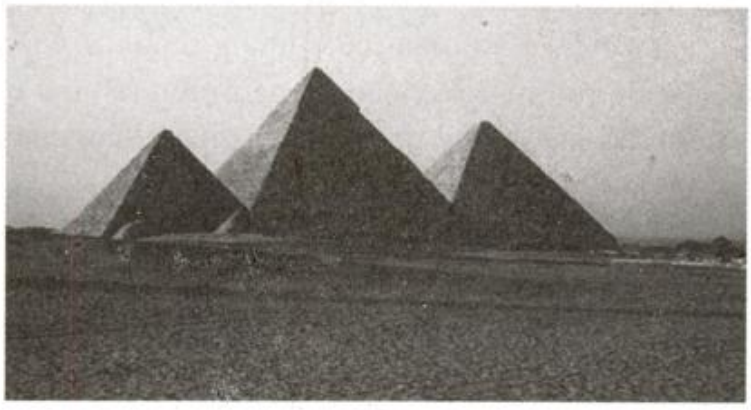
• Mặt phẳng đi qua đường thẳng a và điểm A không nằm trên a được kí hiệu là mp(a, A) hoặc mp(A, a).

• Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b được kí hiệu là mp(a, b).

4. Hình chóp và hình tứ diện

Hình chóp

Các kim tự tháp Ai Cập là công trình kiến trúc hùng vĩ đã được xây dựng cách đây gần 4500 năm (h.43). Chúng gồm nhiều hình chóp. Sau đây chúng ta sẽ nói về hình chóp và các tính chất của nó.



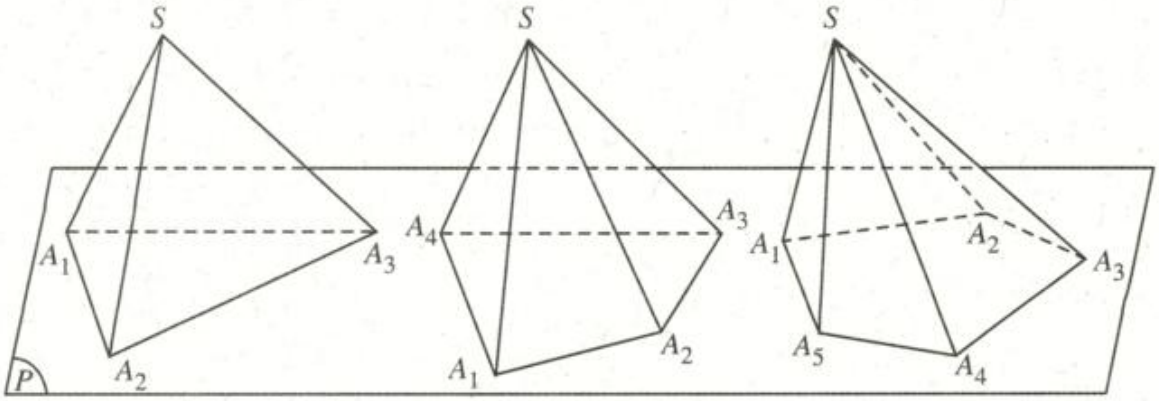
Hình 43. Kim tự tháp Ai Cập

Trước hết ta quy ước : Từ nay, khi nói đến "tam giác", ta có thể hiểu là hình gồm ba cạnh của nó hoặc là hình gồm ba cạnh và các điểm nằm trong tam giác đó. Đối với đa giác cũng như thế.

Định nghĩa

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n để được n tam giác : SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là ***hình chóp*** *và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.*



Hình 44

Điểm S gọi là ***đỉnh*** của hình chóp. Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là ***mặt đáy*** của hình chóp. Các cạnh của mặt đáy gọi là các ***cạnh đáy*** của hình chóp. Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các ***cạnh bên*** của hình chóp. Mỗi tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là một ***mặt bên*** của hình chóp. Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là ***hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác*** (h.44), ...

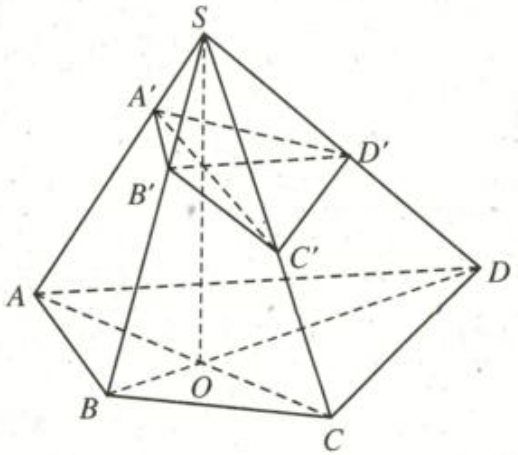
5

a) Có hình chóp nào mà số cạnh (cạnh bên và cạnh đáy) của nó là số lẻ không ? Tại sao ?

b) Hình chóp có 16 cạnh thì có bao nhiêu mặt ?

6

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.



Hình 45

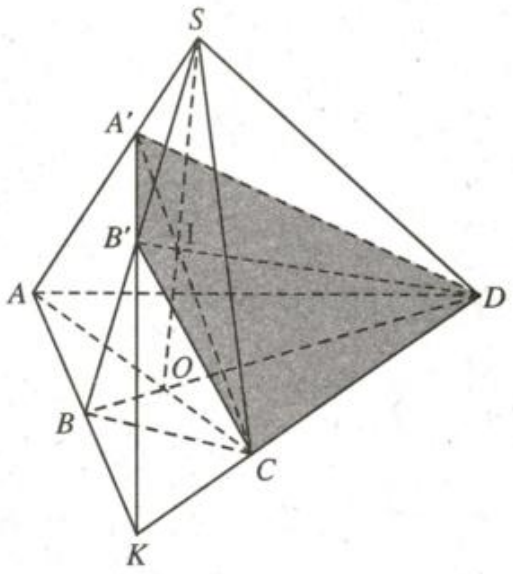
Chứng minh rằng các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SO đồng quy (O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của đáy) (h.45).

Ví dụ 2

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi A' là một điểm nằm giữa hai điểm S và A. Hãy tìm các giao tuyến của mp(A'CD) với các mặt phẳng (ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SDA).

Giải (h.46)

Cách 1. Áp dụng kết quả của hoạt động 6 ở trên, ta có mặt phẳng $(A'CD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C, D thì B' là giao điểm của đường thẳng DI với cạnh SB (ở đây I là giao điểm của hai đường thẳng SO và CA').



Hình 46

Từ đó dễ thấy :

$(ABCD) \cap (A'CD) = CD$;

$(SAB) \cap (A'CD) = A'B'$;

$(SBC) \cap (A'CD) = CB'$;

$(SCD) \cap (A'CD) = CD$;

$(SDA) \cap (A'CD) = DA'$.

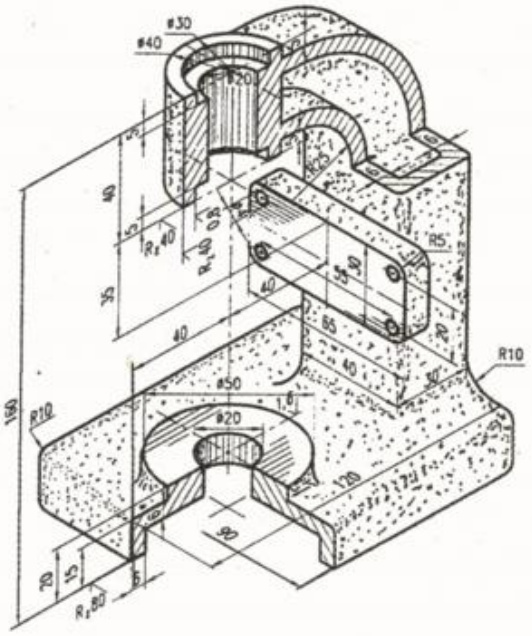
Cách 2. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD thì rõ ràng giao tuyến của mp$(A'CD)$ và mp(SAB) là đường thẳng $A'K$. Khi ấy giao điểm B' của mp$(A'CD)$ và cạnh bên SB của hình chóp chính là giao điểm của đường thẳng $A'K$ và SB. Từ đó ta tìm ra các giao tuyến của các mặt phẳng chứa các mặt còn lại của hình chóp với mp$(A'CD)$. □

☞ CHÚ Ý 2

Tứ giác $A'B'CD$ có các cạnh nằm trên những giao tuyến của mặt phẳng $(A'CD)$ với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Tứ giác đó được gọi là *thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp$(A'CD)$.

Nói một cách đơn giản : ***Thiết diện*** (hay ***mặt cắt***) của hình $\mathcal{H}$ khi cắt bởi mp(P) là phần chung của mp(P) và hình $\mathcal{H}$.

Khi xây dựng một ngôi nhà, chế tạo một cỗ máy, ..., để thể hiện hình dạng bên trong của chúng, người thiết kế đã dùng những mặt phẳng cắt để mô tả những thiết diện của chúng trên bản vẽ (h.47).



Hình 47. Thiết diện của thân máy ▸

Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là ***hình tứ diện*** (hay ngắn gọn là ***tứ diện***) và được kí hiệu là $ABCD$. Các điểm A, B, C, D gọi là các ***đỉnh*** của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các ***cạnh*** của tứ diện. Hai cạnh không có điểm chung gọi là ***hai cạnh đối diện***. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các ***mặt*** của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là ***đỉnh đối diện với mặt*** đó.

?4 *Một tứ diện ABCD có thể coi là hình chóp tam giác bằng bao nhiêu cách ? Hãy nói cụ thể mỗi cách.*

Đặc biệt, hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều được gọi là ***hình tứ diện đều***.

?5 *Các cạnh của hình tứ diện đều có bằng nhau hay không ?*

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước ;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ;

c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

2. Em hãy giải thích vì sao các đồ vật có bốn chân như bàn, ghế, ... thường dễ bị cập kênh.

3. Với một cái thước thẳng, làm thế nào để phát hiện một mặt bàn có phẳng hay không ? Nói rõ căn cứ vào đâu mà ta làm như vậy.

4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.

5. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng nằm ngoài (P). Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AB, BC, CA đều cắt mp(P) thì các giao điểm đó thẳng hàng.

6. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước ;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó ;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

7. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước ;

b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước ;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

8. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng hay không ?

9. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng chúng đồng quy.

10. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp(a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là điểm di động trên c và khác I. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định.

11. Cho hình bình hành $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mp(P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A ; N là điểm nằm giữa S và B ; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O.

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng SO.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

12. Vẽ một số hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác trong các trường hợp đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.

13. Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không ?

14. Dùng bìa cứng cắt và dán lại để thành :

a) Một tứ diện đều ;

b) Một hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các mặt bên là những tam giác đều.

15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp$(A'B'C')$.

16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(ABM).