§3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

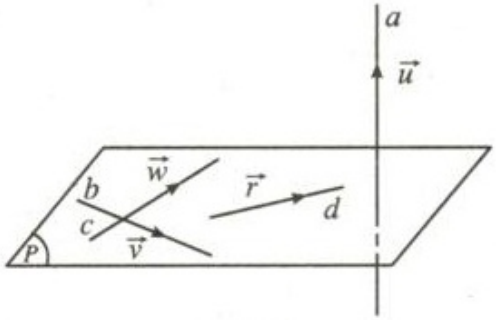
Bài toán 1

Cho hai đường thẳng cắt nhau b và c cùng nằm trong mặt phẳng (P). Chứng minh rằng nếu đường thẳng a vuông góc với cả b và c thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

1 (Để giải bài toán 1)

• Kí hiệu $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng a, b, c, d, trong đó d là đường thẳng bất kì nằm trong (P) (h.97). Giả thiết của bài toán có nghĩa là $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$.

Hãy chứng tỏ $\vec{u}.\vec{r} = 0$.



Hình 97

Khi a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì ta nói rằng đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Vậy ta có định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA 1

*Một đường thẳng gọi là **vuông góc** với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.*

Khi đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), ta còn nói mặt phẳng (P) vuông góc với a hoặc a và (P) vuông góc với nhau, và kí hiệu $a \perp (P)$ hoặc $(P) \perp a$.

Từ bài toán 1 và định nghĩa trên, ta có định lí sau nói về điều kiện để đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau.

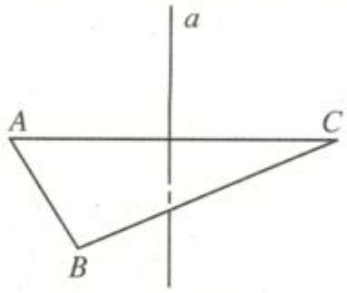
ĐỊNH LÍ 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

2

Chứng tỏ rằng nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba, tức là phải chứng minh (h.98) :

$$\left.\begin{array}{l} a \perp AB \\ a \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp BC.$$



Hình 98

2. Các tính chất

Từ định nghĩa nêu trên, ta có các tính chất sau :

Tính chất 1

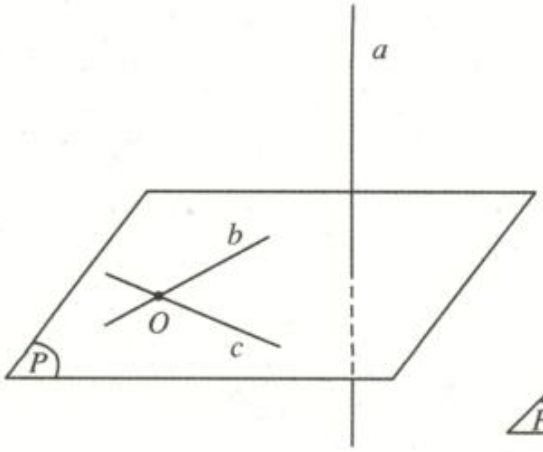
Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

Tính chất 2

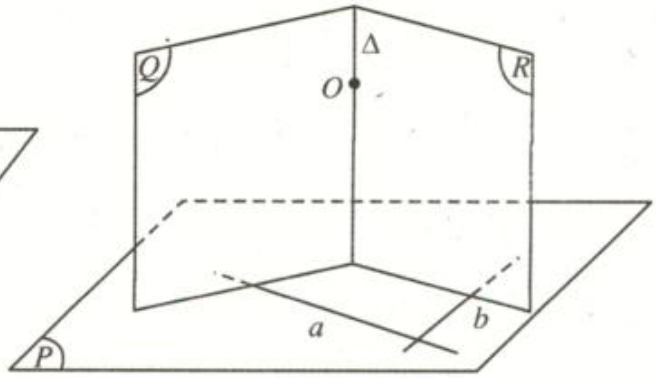
Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Nhận xét

• Mặt phẳng (P) nói trong tính chất 1 được xác định bởi hai đường thẳng phân biệt b và c cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với đường thẳng a (h.99).



Hình 99

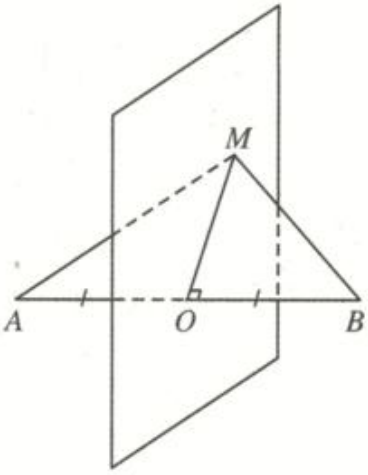


Hình 100

• Đường thẳng Δ trong tính chất 2 là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R) cùng đi qua O và lần lượt vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) (h.100).

• Từ tính chất 1, ta thấy có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm O của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng đó gọi là ***mặt phẳng trung trực*** của đoạn thẳng AB (h.101).

Dễ thấy rằng *mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.*



Hình 101

3

Tìm tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

Trong chương II, ta đã đề cập đến quan hệ song song giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng. Kết hợp với các tính chất nêu trên, ta có thể chứng minh được một số tính chất nói về mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 3 (h.102)

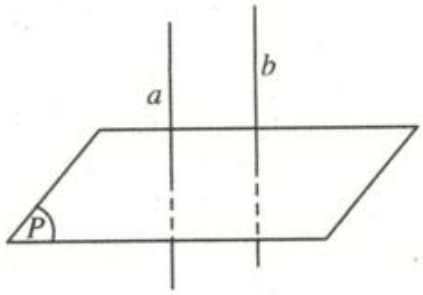
a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3 được viết gọn là :

- $\left.\begin{array}{l} a // b \\ (P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp b$;

- $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \not\equiv b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b.$



Hình 102

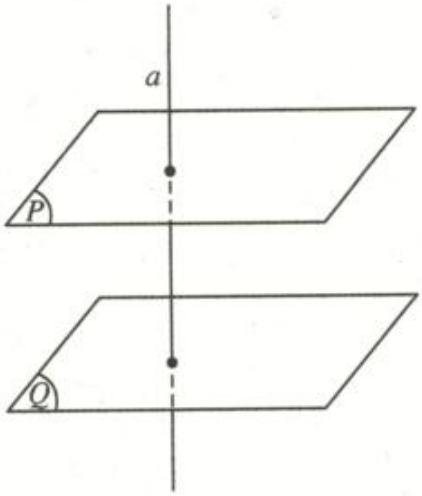
Tính chất 4 (h.103)

> *a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.*
>
> *b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

Tính chất 4 được viết gọn là :

- $\left.\begin{array}{l} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)$;

- $\left.\begin{array}{l} (P) \perp a \\ (Q) \perp a \\ (P) \not\equiv (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (Q).$



Hình 103

Nhận xét

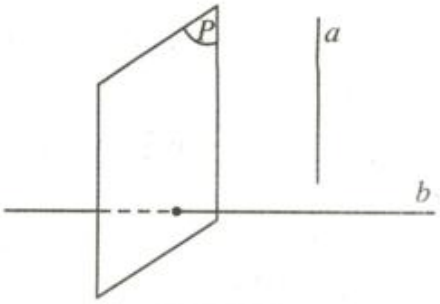
Trong tính chất 3, nếu ta thay các cụm từ "mặt phẳng" thành "đường thẳng", "đường thẳng" thành "mặt phẳng", còn các từ khác giữ nguyên thì ta có tính chất 4.

Tính chất 5 (h.104)

> *a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.*
>
> *b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.*

Tính chất 5 được viết gọn là :

- $\left.\begin{array}{l} a // (P) \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$;
- $\left.\begin{array}{l} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a // (P)$.



Hình 104

4. Định lí ba đường vuông góc

Phép chiếu vuông góc

Một trường hợp thường gặp của phép chiếu song song là phép chiếu vuông góc.

ĐỊNH NGHĨA 2

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là ***phép chiếu vuông góc*** *lên mặt phẳng (P).*

Vì phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song. *Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (P) còn được gọi đơn giản là ***phép chiếu lên mặt phẳng (P)***. Nếu $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của hình $\mathscr{H}$ trên mp(P) thì ta cũng nói $\mathscr{H}'$ là ***hình chiếu*** của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P).

Định lí ba đường vuông góc

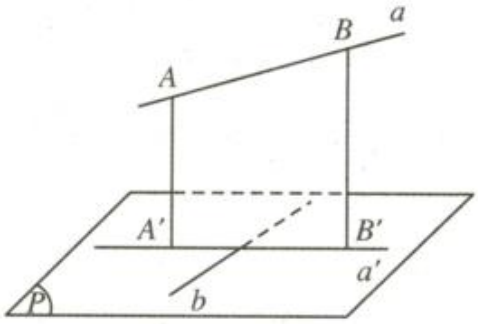
ĐỊNH LÍ 2

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a′ của a trên (P).

Chứng minh

Nếu a nằm trong (P) thì kết quả là hiển nhiên.

Nếu a không nằm trong (P) thì ta lấy hai điểm phân biệt A và B thuộc a. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên (P), khi đó hình chiếu a' của đường thẳng a trên (P) chính là đường thẳng đi qua hai điểm A' và B' (h.105).



Hình 105

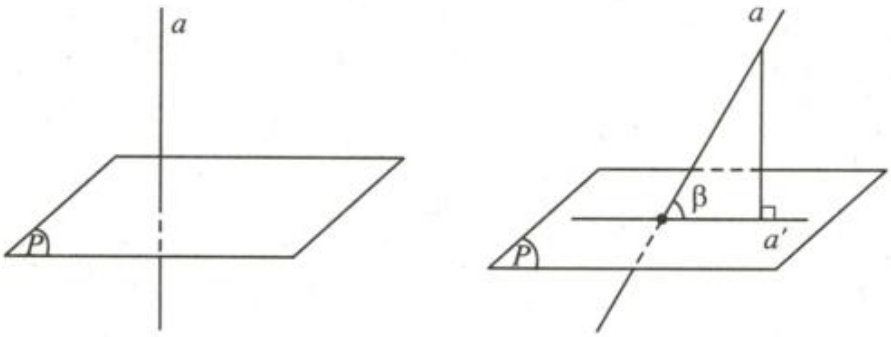
Vì $b \subset (P)$ nên $b \perp AA'$.

Vậy nếu $b \perp a$ thì $b \perp \text{mp}(a', a)$, do đó $b \perp a'$.

Ngược lại, nếu $b \perp a'$ thì $b \perp \text{mp}(a', a)$, do đó $b \perp a$. □

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta có định nghĩa sau (h.106)



a) b)

Hình 106

ĐỊNH NGHĨA 3

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Lưu ý rằng *góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá* 90°.

Ví dụ

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, $SA \perp \text{mp}(ABCD)$.

1. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel BD$ *và* $SC \perp (AMN)$.

b) Gọi K là giao điểm của SC với $\text{mp}(AMN)$. *Chứng minh tứ giác AMKN có hai đường chéo vuông góc.*

2. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) khi $SA = a\sqrt{2}$, $AB = a$.

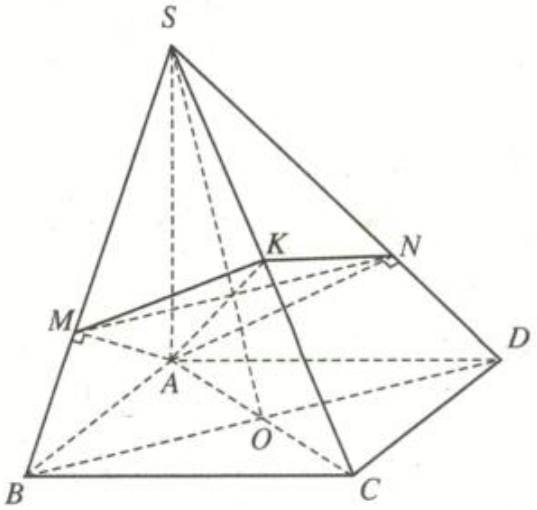
Giải (h.107)

1. a) Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $BM = DN$. Mặt khác, tam giác SBD cân tại đỉnh S nên MN song song với BD.

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$; mặt khác $SB \perp AM$, do đó $AM \perp SC$.

Tương tự, $AN \perp SC$. Vậy $SC \perp (AMN)$.

b) Do $MN \parallel BD$ mà $BD \perp (SAC)$ nên $MN \perp (SAC)$, từ đó $MN \perp AK$.



Hình 107

2. Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt khác $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{2}$ nên $\widehat{SCA} = 45^{\circ}$. Vậy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. □

Câu hỏi và bài tập

12. Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với (P)" có đúng không ? Vì sao ?

13. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

b) Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

c) Nếu $a \parallel (P)$, $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$.

14. Cho điểm S có hình chiếu trên mp(P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là ***đường xiên***, đoạn thẳng HM là ***hình chiếu của đường xiên*** đó. Chứng minh rằng :

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

15. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

16. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

a) Tính độ dài AD. b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

c) Tính góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD), góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (ABC).

17. Cho hình tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.

a) Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ mp(ABC), các tam giác ABCvà SBC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK, BC đồng quy ;

b) $SC \perp$ mp(BHK) ;

c) $HK \perp$ mp(SBC).

19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mp(P).

20. a) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là ***tứ diện trực tâm***.

b) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương :

i) $ABCD$ là tứ diện trực tâm.

ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là ***trực tâm của tứ diện*** nói trên.