

§2

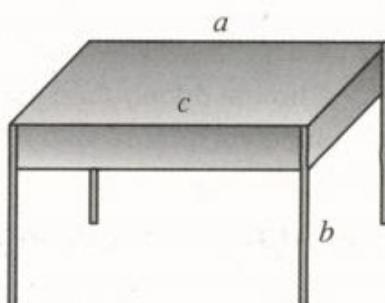
HAI ĐƯỜNG THĂNG SONG SONG

. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

? **1** Hãy quan sát hình 48. Ta coi các mép bàn a , c và cạnh b của chân bàn là các đường thẳng a , b , c .

a) Đường thẳng a và đường thẳng b có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không ?

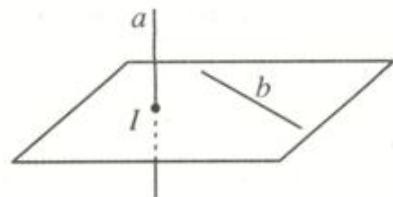
b) Có mặt phẳng nào chứa hai đường thẳng a và c hoặc chứa hai đường thẳng b và c hay không ?



Hình 48

Như vậy, khi cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian thì có thể xảy ra hai trường hợp :

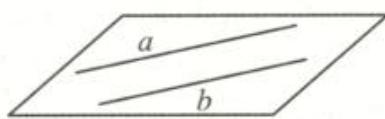
a) Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b . Khi đó ta nói rằng hai đường thẳng a và b *chéo nhau* (h.49).



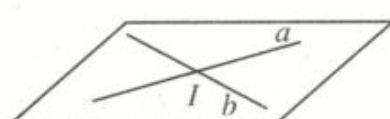
Hình 49

b) Có mặt phẳng chứa cả a và b . Khi đó ta nói rằng chúng *đồng phẳng*. Trong trường hợp này, theo kết quả của hình học phẳng, có hai khả năng xảy ra :

i) a và b không có điểm chung. Khi đó ta nói rằng chúng *song song* với nhau (hoặc chúng *song song*) và kí hiệu $a \parallel b$ (h.50).



Hình 50



Hình 51

ii) a và b có một điểm chung duy nhất. Khi đó ta nói rằng chúng *cắt nhau*. Nếu điểm chung của chúng là I , ta nói rằng chúng *cắt nhau tại I* hoặc I là *giao điểm* của chúng và viết $a \cap b = \{I\}$ hoặc $a \cap b = I$ (h.51).

ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.



1

Cho tứ diện $ABCD$. Hãy xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng AB và CD .



2

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có hay không hai đường thẳng p, q song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b ?

2. Hai đường thẳng song song

Dựa vào tiên đề O-clít về đường thẳng song song trong mặt phẳng, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây

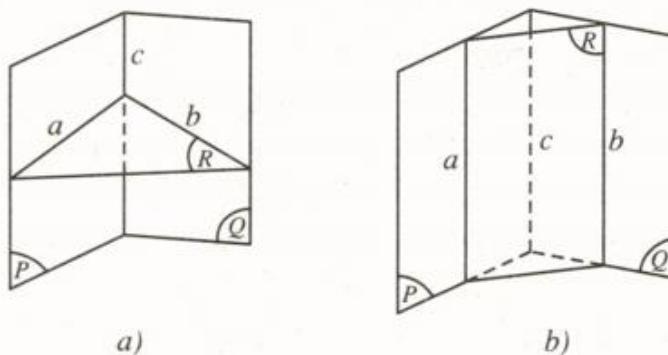
Tính chất 1

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Giả sử (P) , (Q) , (R) là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a , b , c , trong đó : $a = (P) \cap (R)$, $b = (Q) \cap (R)$, $c = (P) \cap (Q)$ (h.52).



Hình 52

?? Có những vị trí tương đối nào giữa hai giao tuyến a và b ?



3

Dùng kết quả bài tập 4 của §1, hãy chứng tỏ rằng ba giao tuyến a , b , c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Từ đó ta có định lí sau đây :

ĐỊNH LÍ (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

HỆ QUẢ

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).



Hãy sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng để chứng minh hệ quả trên.

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, DA, AC, BD .

Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ và RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ đã cho (h.53).

Giải

Vì MP là đường trung bình của tam giác ABC , NQ là đường trung bình của tam giác ADC nên $MP \parallel AC, NQ \parallel AC$,

$MP = \frac{1}{2}AC, NQ = \frac{1}{2}AC$. Vậy $MP \parallel NQ$ và $MP = NQ$, do đó tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó, ta suy ra các đoạn thẳng MN và PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự, các đoạn thẳng MN và RS cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Vậy, ba đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn thẳng đó. \square

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

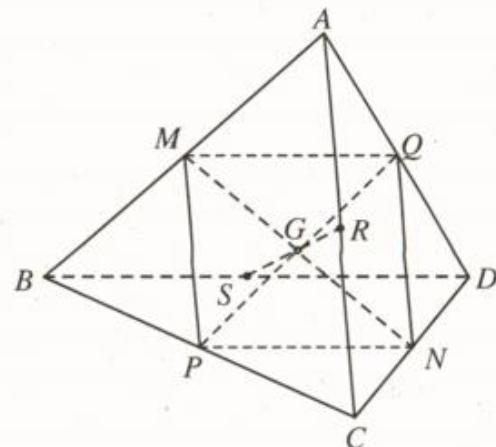
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MBC) , trong đó M là một điểm nằm giữa hai điểm S và A .

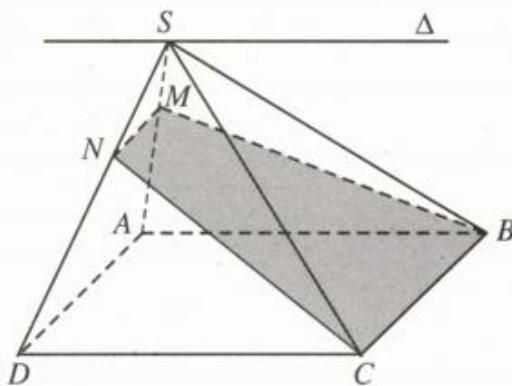
Giải (h.54)

a) $mp(SAB)$ và $mp(SCD)$ có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song AB và CD nên chúng cắt nhau theo giao tuyến Δ đi qua S và song song với AB và CD .

b) $mp(MBC)$ và $mp(SAD)$ lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD và có điểm chung M nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MN .



Hình 53



Hình 54

song song với AD ($N \in SD$). Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MBC) là hình thang $MNCB$. \square

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :
 - a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ;
 - b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;
 - c) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau ;
 - d) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .
19. Cho tứ diện $ABCD$. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng
 - a) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy ;
 - b) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PS, RQ, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.
20. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC . Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu :
 - a) $PR // AC$;
 - b) PR cắt AC .
21. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD . Chứng minh rằng $AS = 2SD$.
22. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.
 - a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.
 - b) Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD . Chứng minh rằng $GA = 3GA'$.