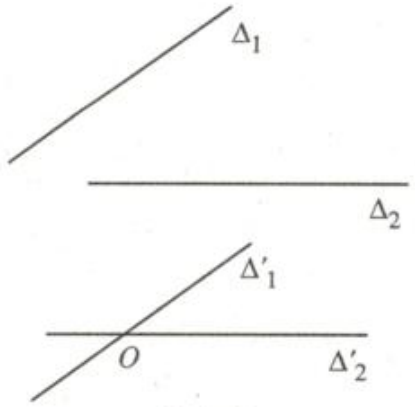
§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bất kì trong không gian. Từ điểm O nào đó, ta vẽ hai đường thẳng Δ'_1, Δ'_2 lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1, Δ_2. Dễ thấy rằng khi điểm O thay đổi thì góc giữa Δ'_1 và Δ'_2 không thay đổi (h.93). Vì vậy ta có định nghĩa sau



Hình 93

ĐỊNH NGHĨA 1

Góc giữa hai đường thẳng *Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.*

Nhận xét

1) Để xác định góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, ta có thể lấy điểm O nói trên thuộc một trong hai đường thẳng đó.

2) Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90°.

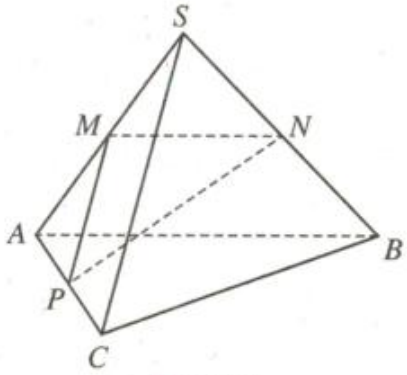
3) Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng α nếu $\alpha \leq 90^o$ và bằng $180^o - \alpha$ nếu $\alpha > 90^o$.

Ví dụ 1

Cho hình chóp S.ABC có

$$SA = SB = SC = AB = AC = a \text{ và } BC = a\sqrt{2}.$$

Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB (h.94).



Hình 94

? *Các mặt của hình chóp S.ABC là những tam giác có gì đặc biệt ?*

Giải

Cách 1. Ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^o$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.

Cách 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC. Khi đó MN // AB, MP // SC. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính $\widehat{NMP}$.

Ta có $\quad MN = MP = \frac{a}{2}, \quad SP^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad BP^2 = \frac{5a^2}{4},$

$$BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2}.$$

Vậy $NP^2 = \frac{3a^2}{4}$.

Mặt khác

$$NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\widehat{NMP},$$

do đó $\quad \cos\widehat{NMP} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{NMP} = 120^o$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°. □

2. Hai đường thẳng vuông góc

ĐỊNH NGHĨA 2

Hai đường thẳng được gọi là ***vuông góc với nhau*** *nếu góc giữa chúng bằng* 90°.

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta còn nói gọn là hai đường thẳng a và b vuông góc, và kí hiệu $a \perp b$ hay $b \perp a$. Như vậy $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$, ở đó $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b.

Từ định nghĩa trên, ta có nhận xét sau

Nhận xét

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (hình hộp như thế gọi là ***hình hộp thoi***). Hãy giải thích tại sao $AC \perp B'D'$.

Ví dụ 2

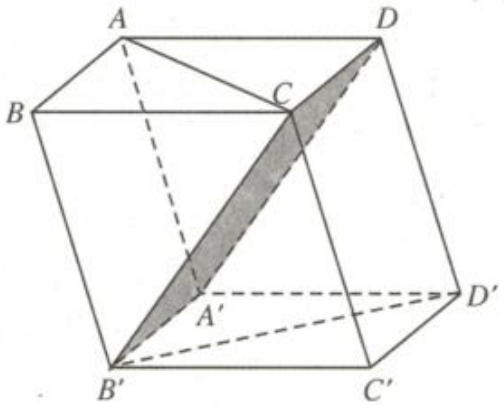
Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và

$$\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^{\circ}.$$

Tính diện tích tứ giác $A'B'CD$.

Giải (h.95)

Trước hết ta dễ thấy $A'B'CD$ là hình bình hành, ngoài ra $B'C = a = CD$ nên $A'B'CD$ là hình thoi. Ta sẽ chứng minh $A'B'CD$ là hình vuông.



Hình 95

Thật vậy, ta có

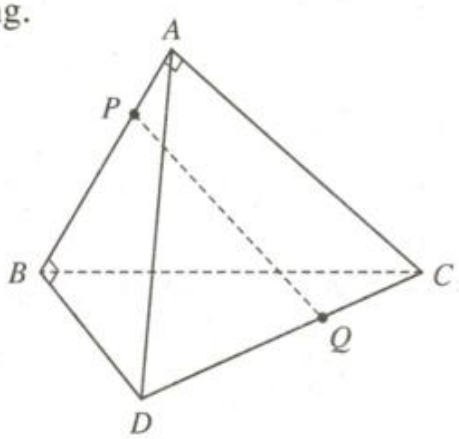
$$\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Vậy có $CB' \perp CD$, do đó $A'B'CD$ là hình vuông.

Từ đó diện tích hình vuông $A'B'CD$ bằng a^2. □

Ví dụ 3

Cho hình tứ diện $ABCD$, trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau (h.96).



Hình 96

2 (Để giải ví dụ 3)

Biểu thị $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DQ}$ để có

$$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}.$$

Tính tích vô hướng của $(1-k)\overrightarrow{PQ}$ với $\overrightarrow{AB}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4

Tính các góc giữa các cặp đường thẳng DA và BC, DB và AC. DC và AB của tứ diện ABCD, biết rằng DA = BC = a, DB = AC = b, DC = AB = c.

Giải

Theo kết quả ở ví dụ 2 §1 (trang 86), ta có

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng BC và AD là α mà $\cos\alpha = \dfrac{|c^2 - b^2|}{a^2}$.

Tương tự như trên, nếu gọi β và γ lần lượt là góc giữa các cặp đường thẳng AC và BD, AB và DC thì

$$\cos\beta = \frac{|a^2 - c^2|}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{|a^2 - b^2|}{c^2}. \qquad \square$$

Câu hỏi và bài tập

7. Mỗi khẳng định sau có đúng không ?

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

8. a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b) Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

10. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không ?

11. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = 60^o$, $\widehat{BAD} = 60^o$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CD$;

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.